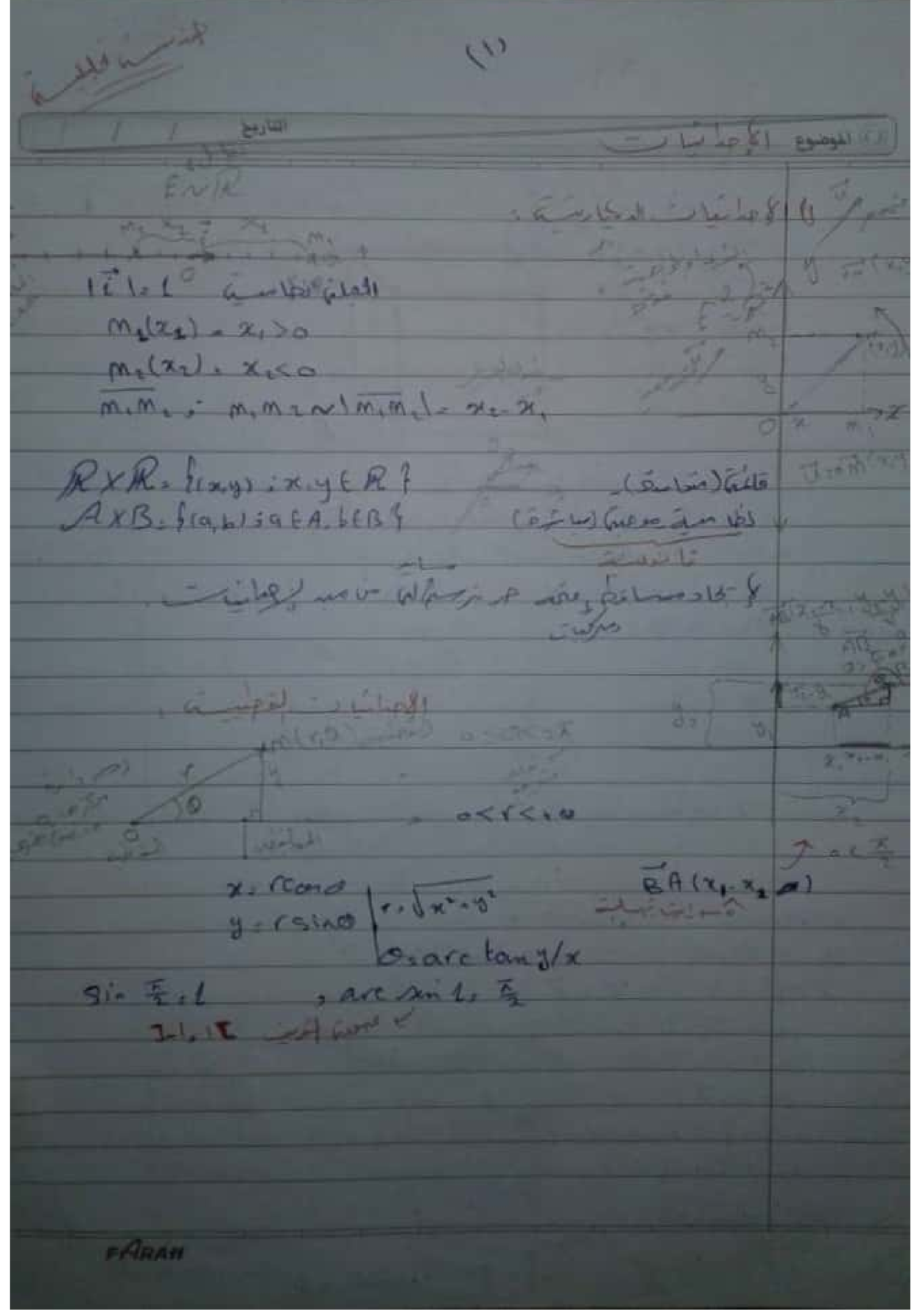
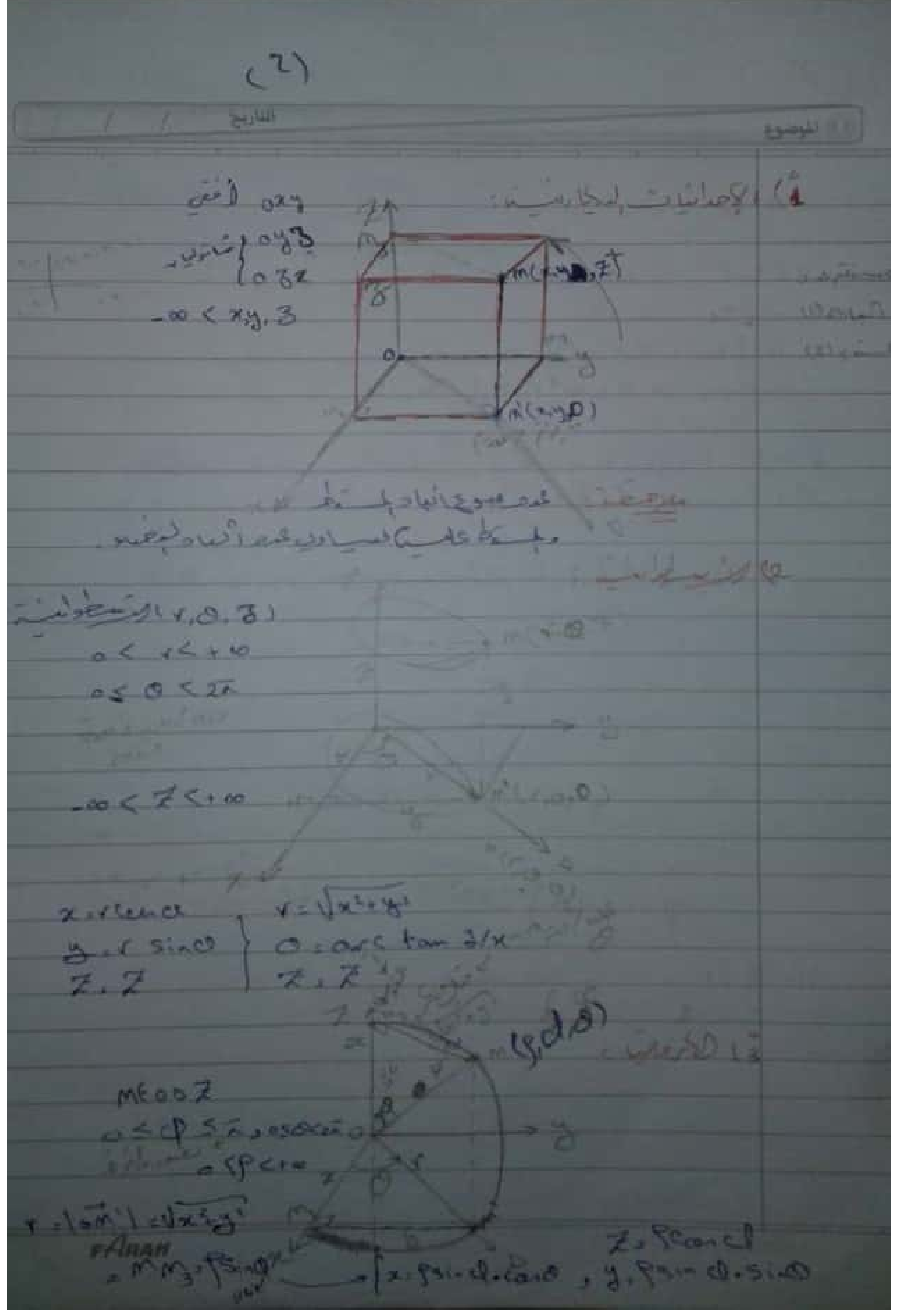

(1)
التاريخ / /
الموضوع الإحداثيات
1) الإحداثيات الديكارتية :
المعلم الكارتيزي $(O, \vec{i})$, $\|\vec{i}\| = 1$
$M_1(x_1)$, $x_1 > 0$
$M_2(x_2)$, $x_2 < 0$
$\overline{M_1M_2}$; $M_1M_2 = |\overline{M_1M_2}| = x_2 - x_1$
$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) ; x, y \in \mathbb{R}\}$
$A \times B = \{(a, b) ; a \in A, b \in B\}$
2) الإحداثيات القطبية
$0 < r < +\infty$
$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$\theta = \arctan y/x$
$\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$
$\overrightarrow{BA}(x_1 - x_2, \ldots)$
FARAH


التاريخ / /
الموضوع
1) الإحداثيات الديكارتية
oxy أفقي
oyz } شاقولي
ozx
$-\infty < x, y, z$
m(x, y, z)
m'(x, y, 0)
ملاحظة
عدد معلوم أبعاد المستوى
المستوى علاقته يساوي عدد أبعاد الفضاء
2) الأسطوانية
(r, θ, z) الأسطوانية
$0 < r < +\infty$
$0 \le \theta < 2\pi$
$-\infty < z < +\infty$
$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$
$z = z$
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$\theta = \arctan y/x$
$z = z$
3) الكروية
m(ρ, φ, θ)
$M \in oz$
$0 \le \varphi \le \pi$
$0 < \rho < +\infty$
$r = |\vec{om'}| = \sqrt{x^2 + y^2}$
$= MM_3 = \rho\sin\varphi$
$z = \rho\cos\varphi$
$x = \rho\sin\varphi\cos\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$
FARAH

التاريخ / /

الموضوع: جبر المتجهات

تعريف: يعرف المتجه بأنه قطعة مستقيمة موجهة.

كل متجه له ثلاثة عناصر:
1) الطول (الطويلة)
2) المنحى
3) الجهة (الاتجاه)
4) المبدأ (البداية) المثبت / الحقيقية

$a = |\vec{u}| \cos\theta$, $|\vec{u}| \sin\theta$

$\vec{u}(a, b)$

$0 \le \theta \le \pi$

$\theta = 0 \Rightarrow \vec{u} \parallel ox \Leftrightarrow (\vec{u} \parallel \vec{i})$ شرط: متوازيان بالجهة

$\theta = \pi \Rightarrow \vec{u} \parallel ox \Leftrightarrow (\vec{u} \nparallel \vec{i}) \Leftrightarrow \vec{u} \perp oy \Leftrightarrow (a, 0)$

$\theta = \pi/2 \Rightarrow \vec{u} \perp ox \Leftrightarrow \vec{u} \parallel oy \Leftrightarrow \vec{u}(0, b)$

أي متجه في المستوي xoy

• مسقط أي متجه على "محور مستقيم" يساوي الطويلة في $\cos\theta$

$a = |\vec{u}| . \cos\theta_1 > 0$

$b = |\vec{u}| . \cos\theta_2$

$c = |\vec{u}| \cos\theta_3$

$\vec{u}(a, b, c)$

الزاوية $(0, \pi)$ مالمتساوي

$b = |\vec{u}| \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = |\vec{u}| \sin\theta$

$\theta_1 = 0 \Rightarrow \vec{u} \parallel ox$

$\Leftrightarrow \vec{u} \perp oy, oz \Leftrightarrow \vec{u}(a, 0, 0)$

$\theta = \pi/2 \Leftrightarrow \vec{u} \perp ox \Leftrightarrow \vec{u} \parallel oyz \Rightarrow \vec{u}(a, b, c)$

العمليات الجبرية على المتجهات:

1) جمع متجهين: "أو عدد منها"

$\vec{u}_1(a_1, b_1, c_1)$, $\vec{u}_2(a_2, b_2, c_2)$

$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{u}$

$\vec{u}_1 = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$

$\vec{u}_2 = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$

$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = (a_1 + a_2)\vec{i} + (b_1 + b_2)\vec{j} + (c_1 + c_2)\vec{k}$

FARAH

(٤)

التاريخ / / الموضوع

$\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = (a_1 - a_2)\vec{i} + (b_1 - b_2)\vec{j} + (c_1 - c_2)\vec{k}$

٣) ضرب متجه بعدد :

$\forall \vec{u}(a, b, c) \in E$:

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda . \vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$

1) $(\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v})$: $\lambda > 0$, $\theta = 0$

2) $(\vec{u} \uparrow\downarrow \vec{v})$: $\lambda < 0$, $\theta = \pi$

$\lambda = 0 \Rightarrow 0\vec{u} = \vec{0}$

$\lambda = 1 \Rightarrow 1 . \vec{u} = \vec{u}$

$\lambda = -1 \Rightarrow -1 . \vec{u} = -\vec{u}$ المعاكس

$\lambda = \frac{1}{|\vec{u}|} \Rightarrow \frac{1}{|\vec{u}|} . \vec{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

$\vec{v} = \left|\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right| = \frac{|\vec{u}|}{|\vec{u}|} = 1$

$\lambda\vec{u}(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$

$\vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 = \lambda \vec{u}_2$

$ox : a_1 = \lambda a_2$, $oy : b_1 = \lambda b_2$, $oz : c_1 = \lambda c_2$; $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

$\vec{u}_2(a_2, b_2, c_2)$

$\vec{u}_1(a_1, b_1, c_1)$

٤) الجداء الداخلي (السلمي) :

$\vec{u}_1 . \vec{u}_2 = M$

$\vec{u}_1 . \vec{u}_2 = |\vec{u}_1| . |\vec{u}_2| . \cos\theta$

$0 \le \theta \le \pi$

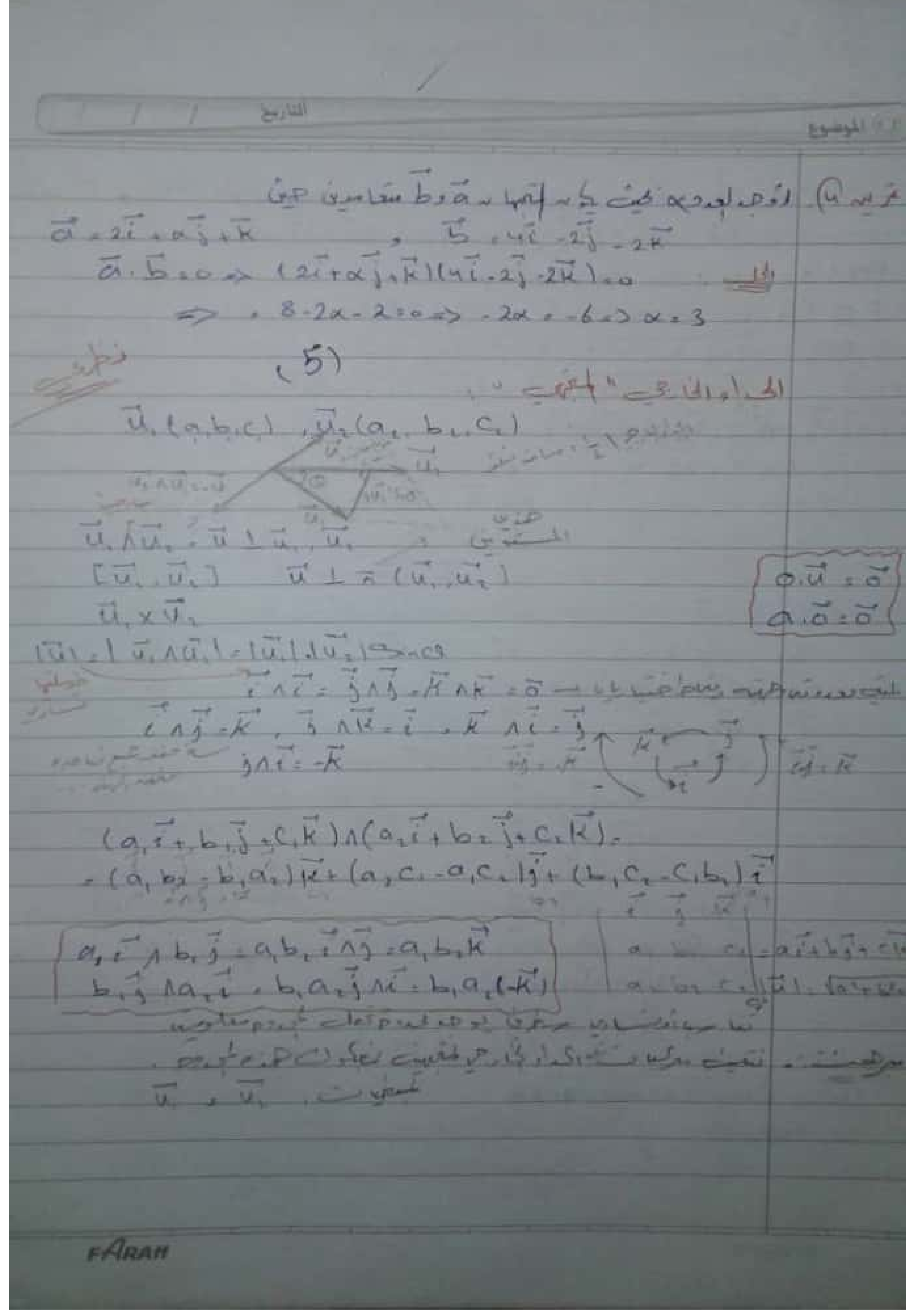
$\cos\theta = \frac{\vec{u}_1 . \vec{u}_2}{|\vec{u}_1| . |\vec{u}_2|}$

$\theta = 0 \Rightarrow \vec{u}_1 \uparrow\uparrow \vec{u}_2$

$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \Rightarrow \vec{u}_1 . \vec{u}_2 = 0$

$\vec{u}_1 . \vec{u}_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$

FARAH



التاريخ / /

الموضوع

تمرين (4) أوجد العدد α بحيث يكون المتجهان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متعامدين حيث

$\vec{a} = 2\vec{i} + \alpha\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$

الحل

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Rightarrow (2\vec{i} + \alpha\vec{j} + \vec{k})(4\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}) = 0$

$\Rightarrow 8 - 2\alpha - 2 = 0 \Rightarrow -2\alpha = -6 \Rightarrow \alpha = 3$

(5)

الجداء الخارجي "المتجهي"

$\vec{u}_1(a_1, b_1, c_1)$, $\vec{u}_2(a_2, b_2, c_2)$

$\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \vec{u} \perp \vec{u}_1, \vec{u}_2$

$[\vec{u}_1, \vec{u}_2]$ $\quad \vec{u} \perp \pi(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$

$\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$

$0\cdot\vec{u} = \vec{0}$

$a\cdot\vec{0} = \vec{0}$

$|\vec{u}| = |\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2| = |\vec{u}_1||\vec{u}_2|\sin\theta$

$\vec{i}\wedge\vec{i} = \vec{j}\wedge\vec{j} = \vec{k}\wedge\vec{k} = \vec{0}$

$\vec{i}\wedge\vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j}\wedge\vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k}\wedge\vec{i} = \vec{j}$

$\vec{j}\wedge\vec{i} = -\vec{k}$

$(a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k})\wedge(a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}) =$

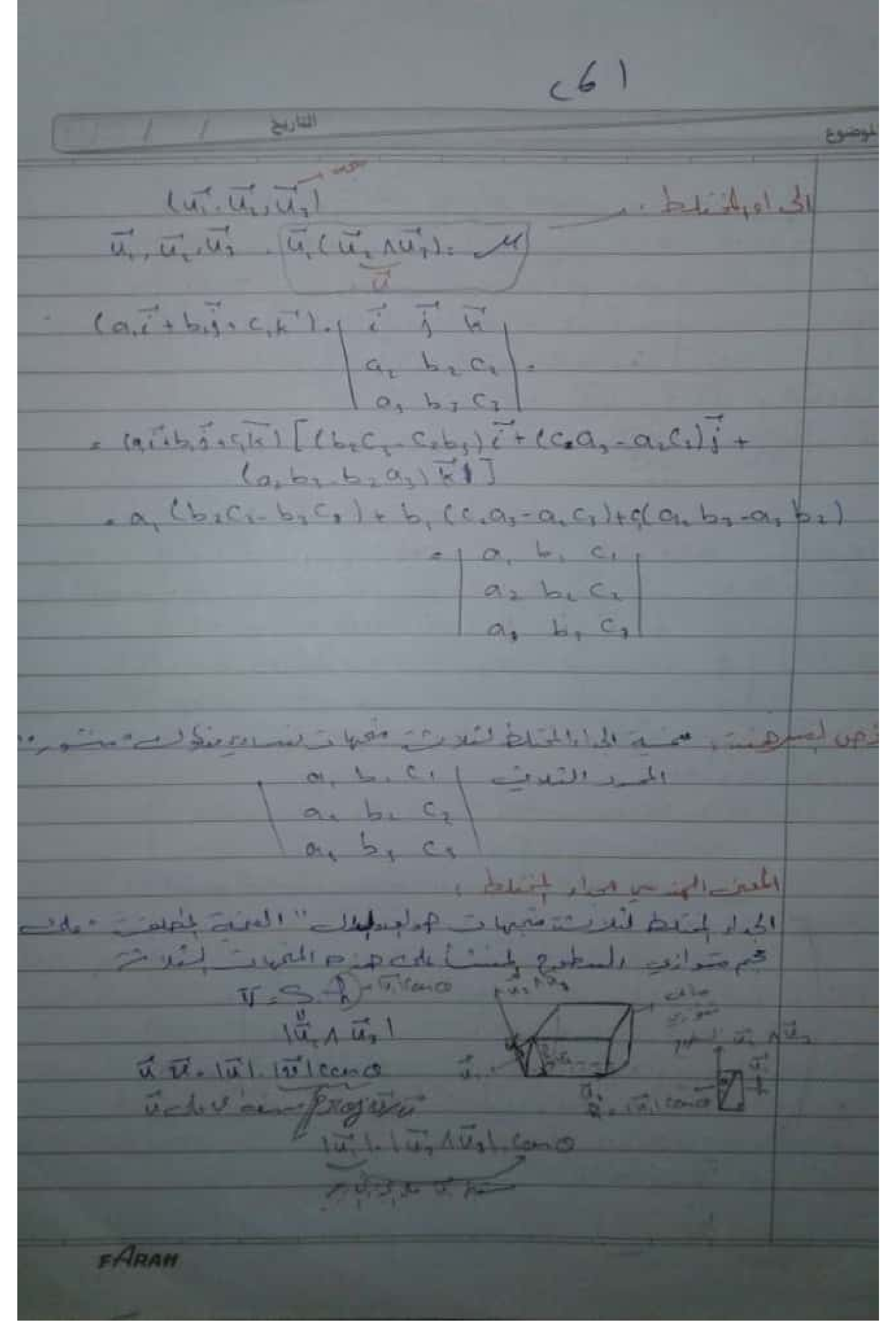
$= (a_1b_2 - b_1a_2)\vec{k} + (a_2c_1 - a_1c_2)\vec{j} + (b_1c_2 - c_1b_2)\vec{i}$

$a_1\vec{i} \wedge b_2\vec{j} = a_1b_2\,\vec{i}\wedge\vec{j} = a_1b_2\vec{k}$

$b_1\vec{j} \wedge a_2\vec{i} = b_1a_2\,\vec{j}\wedge\vec{i} = b_1a_2(-\vec{k})$

$\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$

FARAH



الموضوع — التاريخ / /

الجداء المختلط: $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$

$\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$. $\vec{u_1} \cdot (\vec{u_2} \wedge \vec{u_3}) =$ م

$(a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}) \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$

$= (a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}) [(b_2c_3 - c_2b_3)\vec{i} + (c_2a_3 - a_2c_3)\vec{j} + (a_2b_3 - b_2a_3)\vec{k}]$

$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_1(c_2a_3 - a_2c_3) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$

$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

نذكر للمراجعة: قيمة الجداء المختلط لثلاث متجهات تساوي محدد ...

المحدد الثلاثي $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

المعنى الهندسي لجداء المختلط:

الجداء المختلط لثلاث متجهات هو حجم متوازي المستطيلات "المبنية" على هذه المتجهات الثلاث

$V = S \cdot h$ — $|\vec{u_1}| \cos\theta$

$|\vec{u_2} \wedge \vec{u_3}|$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos\theta$

Projection

$|\vec{u_1}| \cdot |\vec{u_2} \wedge \vec{u_3}| \cdot \cos\theta$

FARAH

المستوي

التاريخ / / الموضوع

تعريف :

تعريف على أجزاء النشاط :

نستخدم الى الخط لبيان ... نقاط واقعة في مستوي ما أو لا

مسلمة المستوي :

إن أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تعين مستوي وحيد

طرائق تعيين المستوي :

1. تعيين المستوي بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

AB, AC على استقامة واحدة ← مرتبطين

AB, AC ليست ... ← مستقلين خطيا

2. يتعين المستوي بنقطة معلومة ويوازي متجهين

3. يتعين المستوي بنقطة معلومة ويعامد شعاعا معلوما

4. يتعين بنقطة معلومة ويعامد شعاعا معلوما

المعادلة العامة للمستوي :

$\forall M(x,y,z) \in \pi$

$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \Rightarrow$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{n}(p, q, r)$

$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \Rightarrow$

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0 \Rightarrow$

$p(x-x_0) + q(y-y_0) + r(z-z_0) = 0$ ①

الناتج . $px + qy + rz + d = 0$ ②

المعادلة العامة للمستوي

$d = -(px_0 + qy_0 + rz_0)$

$p, q, r, d \in R$

$p, q, r, d \neq 0$ فتكون ② معادلة مستوي عام "لا تتوضع شكل خاص بالنسبة لجملة المحاور الإحداثية"

FARAH

نقطة 7

التاريخ / /

الموضوع

المستويات الخاصة

(1) مستوي يمر بمبدأ الإحداثيات $O(0,0,0)$: $O \in \pi \iff h=0$

معادلته: $\pi: px+qy+rz=0$

المعادلة العامة للمستويات المارة بمبدأ الإحداثيات

(2) $\pi \parallel ox \iff \vec{n} \perp ox \Rightarrow p=0$ نحصل على:

$qy+rz+h=0$

المعادلة العامة للمستويات الموازية لـ ox

(1)+(2) $\Rightarrow ox \subset \pi$

$\pi: qy+rz=0$

المعادلة العامة للمستويات المارة بالمحور ox

(3) $\pi \parallel oy: px+rz+h=0$

$oy \subset \pi: px+rz=0$

(4) $\pi \parallel oz: px+qy+h=0$

$oz \subset \pi: px+qy=0$

(5) $\pi \perp ox \iff \vec{n} \parallel ox \iff$ $x=-\frac{h}{p}$

$\vec{n} \perp oy, oz \Rightarrow \pi: px+h=0$ — يوازي oyz

تمثل جميع المستويات العمودية على ox.

المعادلة العامة للمستويات العمودية على ox.

$ox \cap \pi = M_1(-\frac{h}{p},0,0)$

(1)+(5) $\Rightarrow \pi: px=0 \Rightarrow x=0$

تمثل معادلة المستوي الإحداثي oyz

(6) $\pi \perp oy \Rightarrow \pi: qy+h$

$oy \cap \pi = M_2(0,-h/q,0)$

(1)+(6) $\Rightarrow oxz: y=0$

(7) $\pi \perp oz \Rightarrow \pi: rz+h=0$

$oz \cap \pi = M_3(0,0,-h/r)$

(1)+(7) $\Rightarrow oxy: z=0$

FARAH

② تعيين المستوي بنقطة معلومة وموازي لشعاعين معلومين.

المعادلات الوسيطية للمستوي:

$M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u}(p_1, q_1, r_1)$, $\vec{v}(p_2, q_2, r_2)$

$\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$

$\forall M(x, y, z) \in \pi \Rightarrow \overrightarrow{M_0M}, \vec{u}, \vec{v} \in \pi$ (9)

$\vec{u}, \vec{v}$
$\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}$
$\vec{u} = \lambda \vec{u} + \lambda \vec{v}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{M_0M}(\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0 \\ \overrightarrow{M_0M} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} : \lambda, \mu \in R \end{cases}$$

المعادلات بالصيغة الوسيطية

$$\begin{cases} x - x_0 = \lambda p_1 + \mu p_2 \\ y - y_0 = \lambda q_1 + \mu q_2 \\ z - z_0 = \lambda r_1 + \mu r_2 \end{cases} \quad \dots (9)$$

المعادلات الوسيطية للمستوي

- أوجد معادلات وسيطية للمستوي المار بالنقطة $M(1, -1, 2)$ ويوازي الشعاعين $\vec{u}(2, 1, 2)$، $\vec{v}(4, 2, 1)$

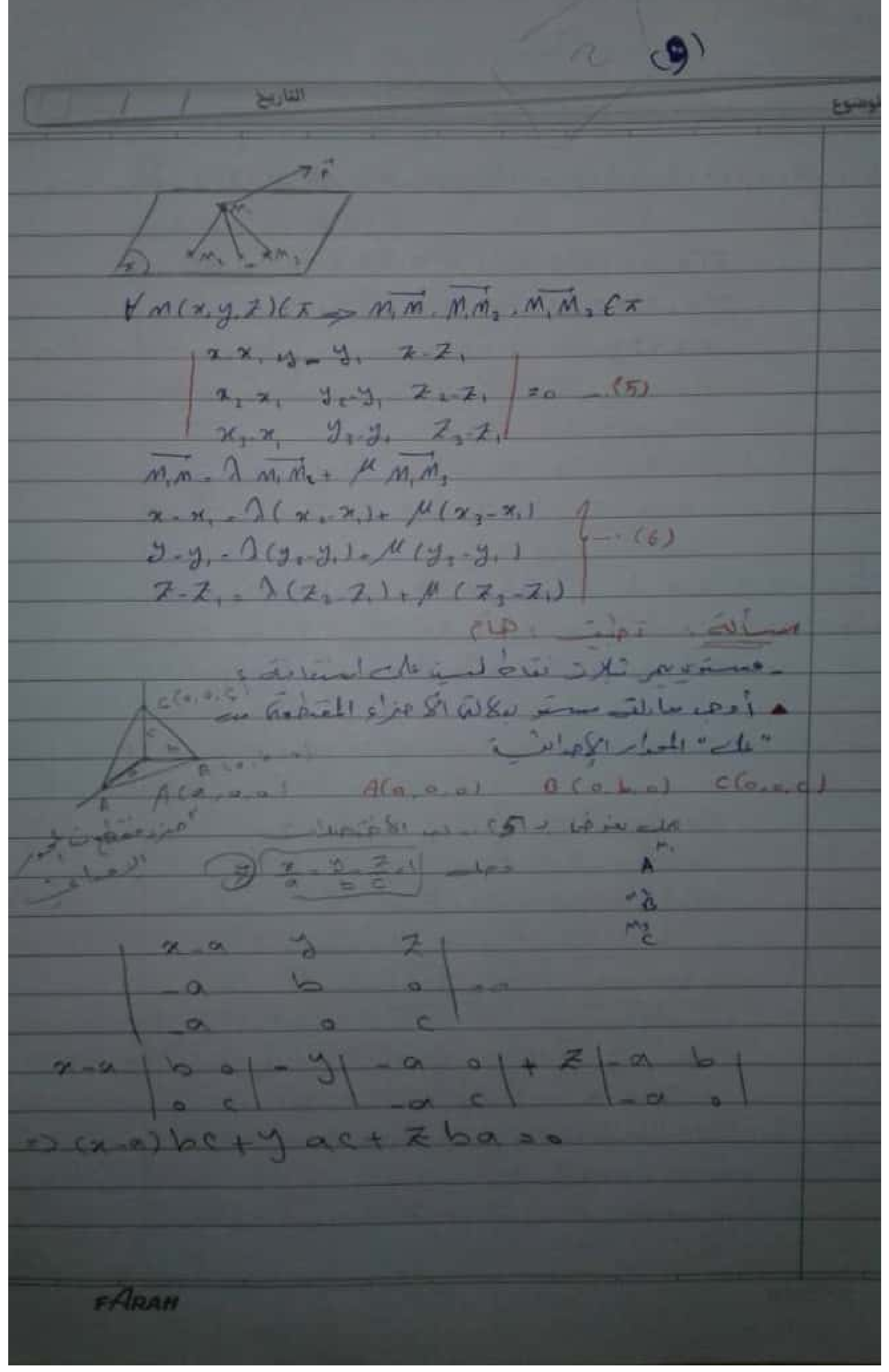
الحل: نعوض في (9)...

$x - 1 = 2\lambda + 4\mu$
$y + 1 = \lambda + 2\mu$
$z - 2 = 2\lambda + \mu$

③ تعيين المستوي بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

$M_1(x_1, y_1, z_1)$، $M_2(x_2, y_2, z_2)$، $M_3(x_3, y_3, z_3)$

FARAN



$$\forall M(x,y,z) \in \pi \Rightarrow \overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3} \in \pi$$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{...(5)}$$

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{M_1M_2} + \mu \overrightarrow{M_1M_3}$$

$$\left.\begin{aligned} x-x_1 &= \lambda(x_2-x_1) + \mu(x_3-x_1) \\ y-y_1 &= \lambda(y_2-y_1) + \mu(y_3-y_1) \\ z-z_1 &= \lambda(z_2-z_1) + \mu(z_3-z_1) \end{aligned}\right\} \text{...(6)}$$

مسألة: تمرين هام

- مستوي يمر بثلاث نقاط ليست على استقامة

▲ أوجد معادلة مستوٍ يقطع الأجزاء المقطوعة من "على" المحاور الإحداثية

$A(a,0,0)$ $B(0,b,0)$ $C(0,0,c)$

علماً بأنها ... الأقسام

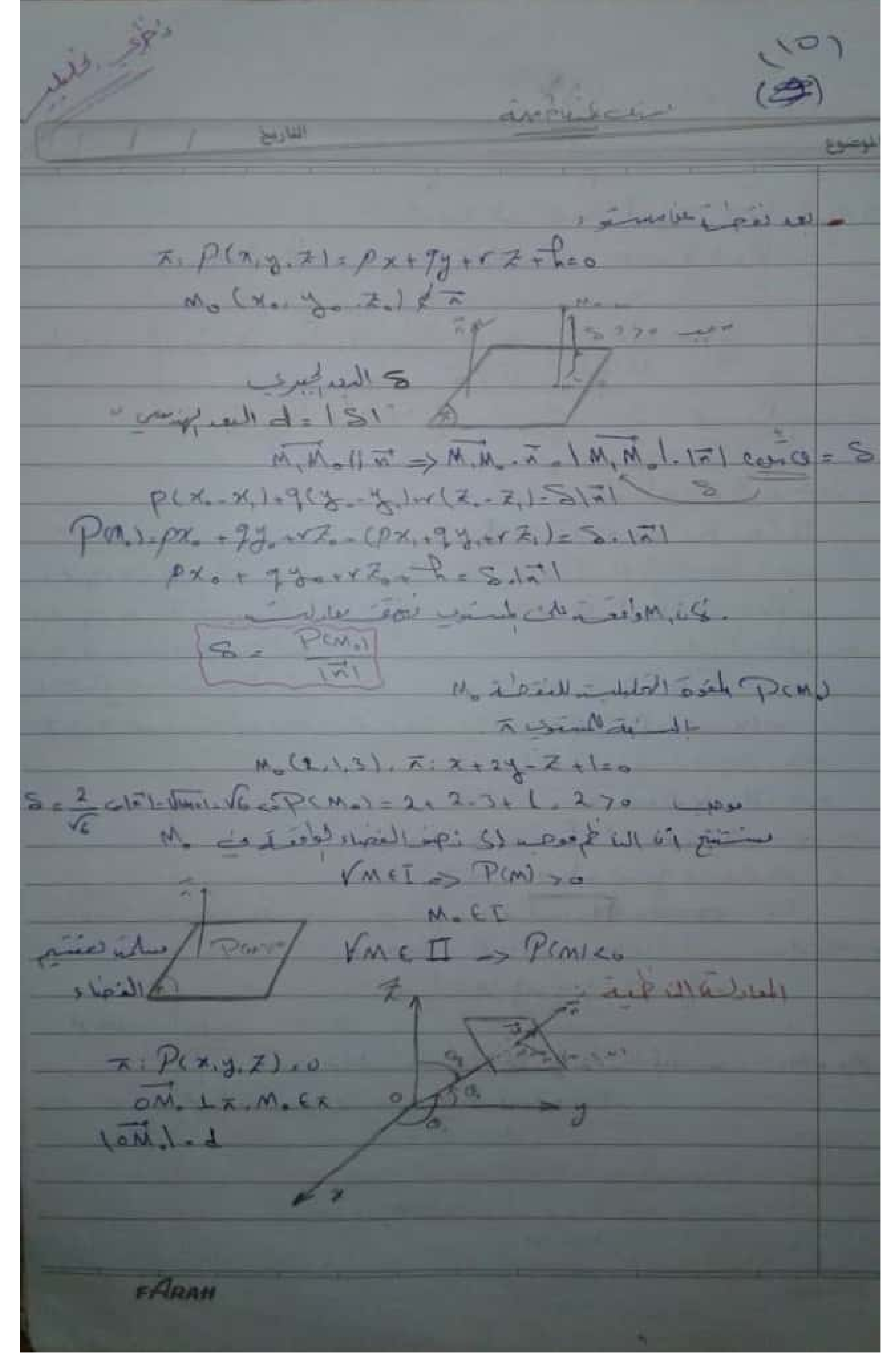
حل: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-a)\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} -a & 0 \\ -a & c \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} -a & b \\ -a & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (x-a)bc + y\,ac + z\,ba = 0$$

FARAH



(١٥)

بعد نقطة عن مستوٍ :

$\pi: P(x,y,z) = px + qy + rz + h = 0$

$M_0(x_0, y_0, z_0) \notin \pi$

δ البعد الجبري

$d = |\delta|$ البعد الهندسي

$\vec{M_1M_0} \parallel \vec{n} \Rightarrow \vec{M_1M_0} \cdot \vec{n} = |\vec{M_1M_0}| \cdot |\vec{n}| \cos\theta = \delta$

$p(x_0 - x_1) + q(y_0 - y_1) + r(z_0 - z_1) = \delta |\vec{n}|$

$P(M_0) = px_0 + qy_0 + rz_0 - (px_1 + qy_1 + rz_1) = \delta \cdot |\vec{n}|$

$px_0 + qy_0 + rz_0 + h = \delta \cdot |\vec{n}|$

لأن M_1 واقعة على المستوي تحقق معادلته.

$$\delta = \frac{P(M_0)}{|\vec{n}|}$$

$P(M)$ القوة التحليلية للنقطة M_0 بالنسبة للمستوي π

$M_0(2,1,3), \ \pi: x + 2y - z + 1 = 0$

$P(M_0) = 2 + 2 - 3 + 1 = 2 > 0$ موجب ، $|\vec{n}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$ ، $\delta = \frac{2}{\sqrt{6}}$

نستنتج أن النقطة M_0 تقع في نصف الفضاء I

$\forall M \in I \Rightarrow P(M) > 0$

$M_0 \in I$

$\forall M \in II \Rightarrow P(M) < 0$

مستوٍ يقسم الفضاء

المعادلة الناظمية

$\pi: P(x,y,z) = 0$

$\vec{OM_0} \perp \pi, \ M_0 \in \pi$

$|\vec{OM_0}| = d$

FARAH

التاريخ / / — الموضوع

$$OM_0 = (d\cos\theta_1 , d\cos\theta_2 , d\cos\theta_3)$$

α ، β ، γ

معامل P.q.r وسطاء توجيه الناظم .

ملاحظة:
$\vec{u}(a,b,c)$ $\quad \frac{1}{|\vec{u}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Rightarrow \vec{U} = \frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}\left(\frac{p}{\sqrt{\ }}, \frac{q}{\sqrt{\ }}, \frac{r}{\sqrt{\ }}\right)$ ، $\vec{U} \parallel \vec{u}$

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} , \frac{q}{\sqrt{\ }} , \frac{r}{\sqrt{\ }}$$ $\quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1$

$\alpha \quad \beta \quad \gamma$

جيوب تمام توجيه الناظم .

$\vec{U}(\alpha , \beta , \gamma)$; $|\vec{U}| = 1$

$\alpha = \cos\theta_1 , \beta = \cos\theta_2 , \gamma = \cos\theta_3$

$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{U} \Rightarrow$ نقطة تنتمي إلى المستوي الناظم على المستوي

ملاحظة:
إذا كانت $M(x,y,z)$
مركبات $\vec{U}(x,y,z)$
وسطاء توجيه الناظم x,y,z
إذا كان $x^2+y^2+z^2=1$ نسميه جيوب تمام توجيه الناظم x,y,z

$$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{U} \Rightarrow$$

$$\alpha(x-\alpha d)+\beta(y-\beta d)+\gamma(z-\gamma d)=0$$

$$\alpha x+\beta y+\gamma z-d(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=0$$

$$\alpha x+\beta y+\gamma z-d=0$$ ناظمية

معادلة عامة $px+qy+rz+h=0$ ← معادلة ناظمية

لتكن المعادلة $2x-2y+z+1=0$ ناظمية

$|\vec{u}| = \sqrt{4+4+1} = 3 \neq 1 \Rightarrow$ إذا كانت تساوي 1 تكون ناظمية

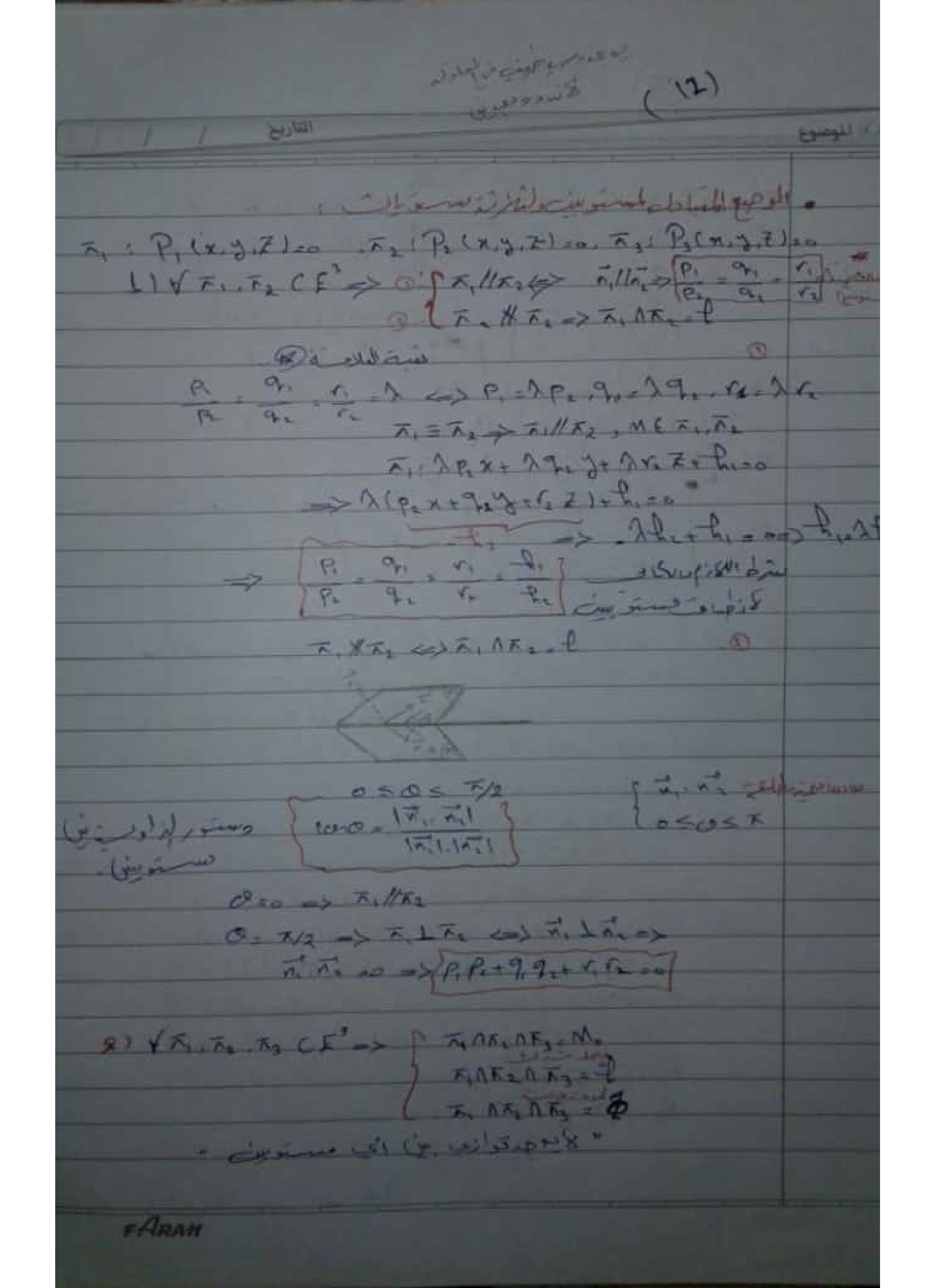
نقسم على $\boxed{-3}$ لكي نحولها إلى ناظمية (سالب الحد الثابت)

$$-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z-\frac{1}{3}=0$$

تطبيق: الأسئلة

أوجد معادلة المستوي المار بالنقطتين المعلومتين M_1 و M_2 والبعد عن النقطة المعلومة M_3 يساوي C .

[illegible]



(12)

• الوضع النسبي لمستويين وثلاثة مستويات :

$\pi_1 : P_1(x,y,z)=0,\quad \pi_2 : P_2(x,y,z)=0,\quad \pi_3 : P_3(x,y,z)=0$

1) $\forall \pi_1,\pi_2 \subset E^3 \Rightarrow$
① $\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Rightarrow \frac{p_1}{p_2}=\frac{q_1}{q_2}=\frac{r_1}{r_2}$
② $\pi_1 \not\parallel \pi_2 \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \ell$

① نسبة التلاقي

$\frac{p_1}{p_2}=\frac{q_1}{q_2}=\frac{r_1}{r_2}=\lambda \Leftrightarrow p_1=\lambda p_2,\ q_1=\lambda q_2,\ r_1=\lambda r_2$

$\pi_1 \equiv \pi_2 \Rightarrow \pi_1 \parallel \pi_2,\ M \in \pi_1,\pi_2$

$\pi_1 : \lambda p_2 x + \lambda q_2 y + \lambda r_2 z + h_1 = 0$

$\Rightarrow \lambda(p_2 x + q_2 y + r_2 z) + h_1 = 0 \Rightarrow -\lambda h_2 + h_1 = 0 \Leftrightarrow h_1 = \lambda h_2$

$\Rightarrow \boxed{\frac{p_1}{p_2}=\frac{q_1}{q_2}=\frac{r_1}{r_2}=\frac{h_1}{h_2}}$ شرط الانطباق لانطباق مستويين

② $\pi_1 \not\parallel \pi_2 \Leftrightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \ell$

الزاوية بين المستويين: $\{\vec{n}_1,\vec{n}_2\}$, $0 \le \theta \le \pi$

$0 \le \theta \le \pi/2$

دستور الزاوية بين مستويين: $\boxed{\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}}$

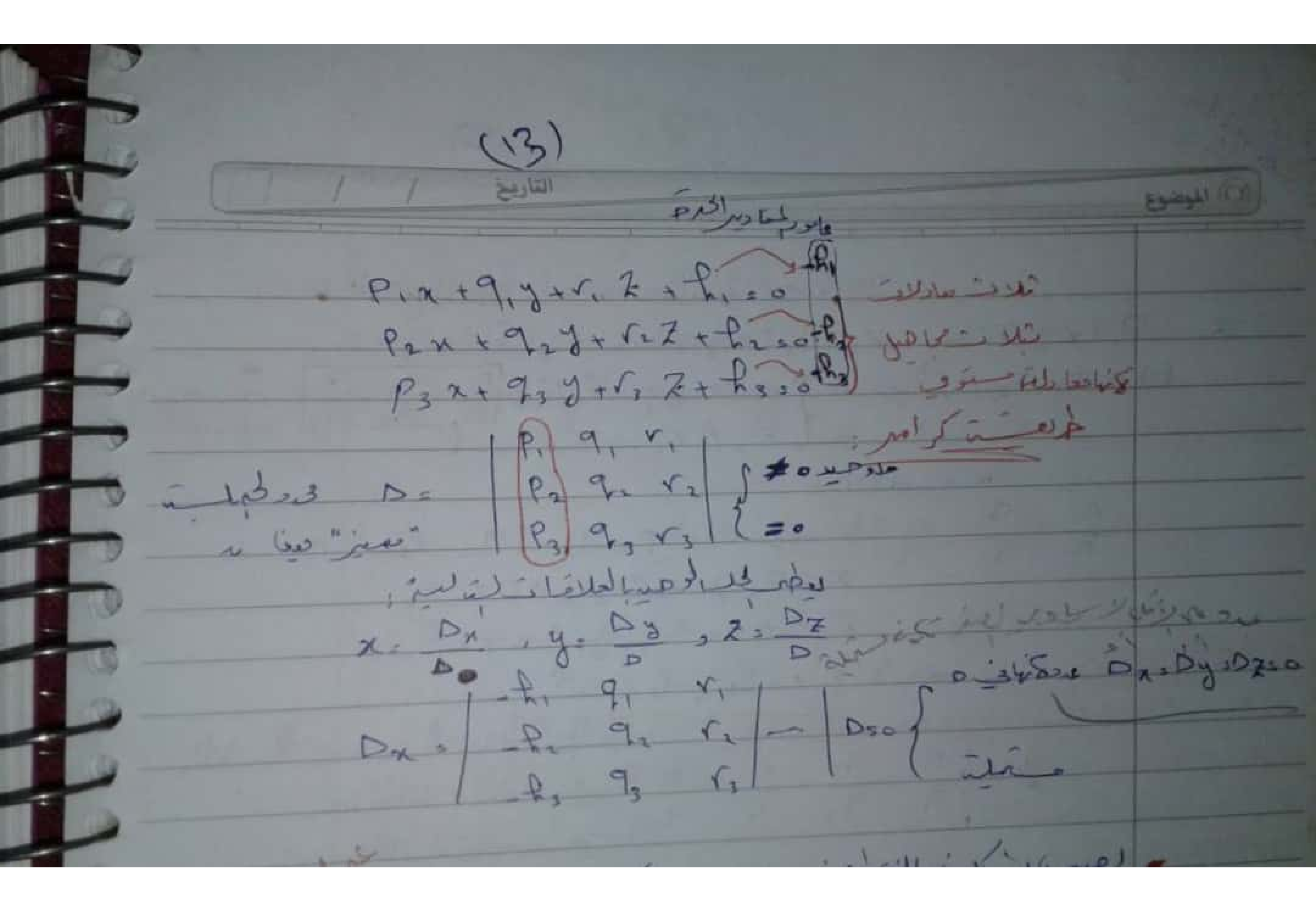
$\theta = 0 \Rightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$

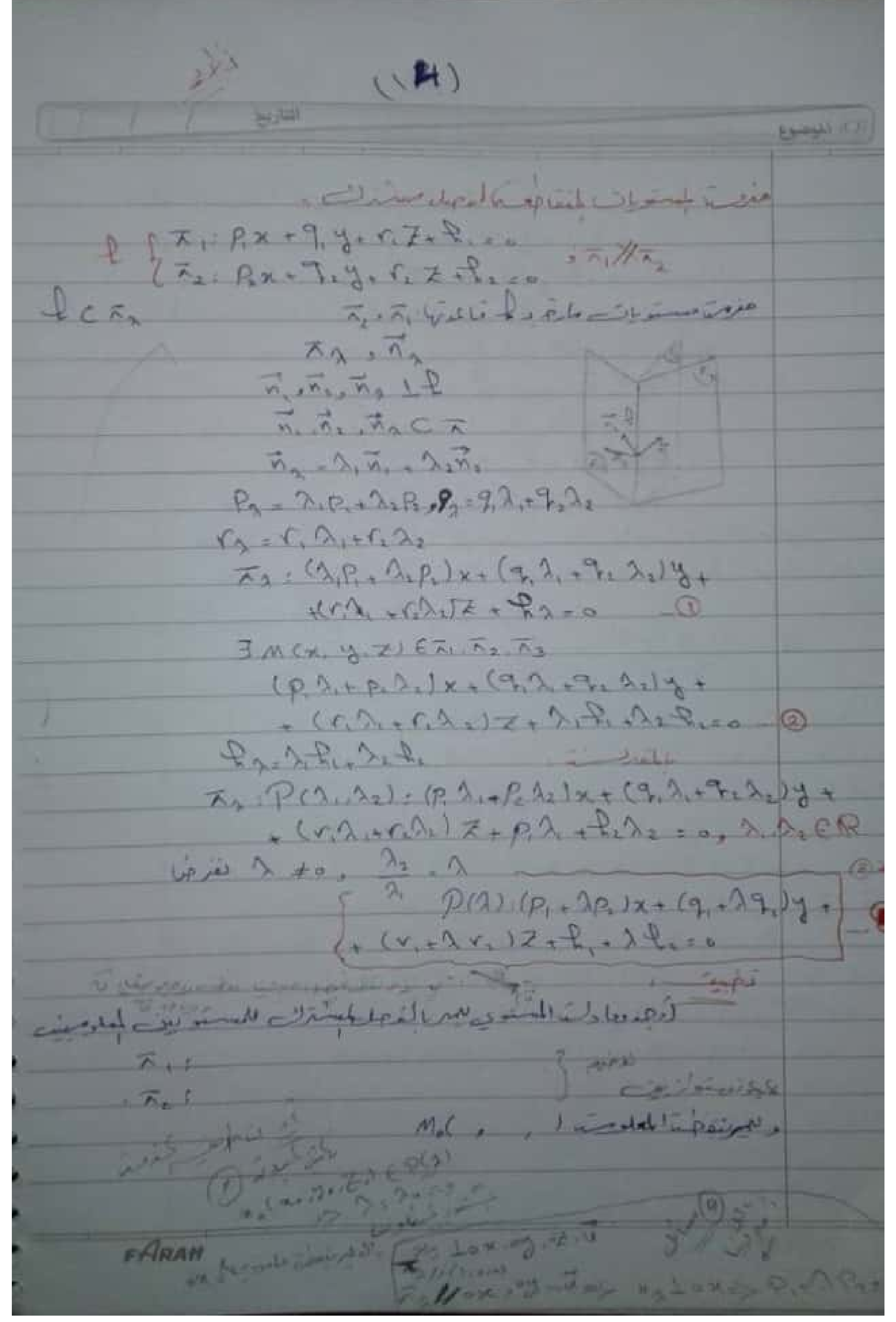
$\theta = \pi/2 \Rightarrow \pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow \boxed{p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2 = 0}$

2) $\forall \pi_1,\pi_2,\pi_3 \subset E^3 \Rightarrow$
$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = M_0$
$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \ell$
$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \Phi$

" لا يوجد توازي بين أي مستويين "

FARAH


(13)
التاريخ
الموضوع
$p_1 x + q_1 y + r_1 z + h_1 = 0$
$p_2 x + q_2 y + r_2 z + h_2 = 0$
$p_3 x + q_3 y + r_3 z + h_3 = 0$
ثلاث معادلات
طريقة كرامر
$\Delta = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}$
$\neq 0$
$= 0$
$x = \frac{\Delta x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta}$
$\Delta x = \begin{vmatrix} -h_1 & q_1 & r_1 \\ -h_2 & q_2 & r_2 \\ -h_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}$
$\Delta = 0$
$\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$



(14)

حزمة المستويات المتقاطعة حول مستقيم

$$l \begin{cases} \pi_1 : p_1 x + q_1 y + r_1 z + h_1 = 0 \\ \pi_2 : p_2 x + q_2 y + r_2 z + h_2 = 0 \end{cases} \quad , \vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$$

$l \subset \pi_\lambda$

حزمة مستويات مارة بـ l فإن $\vec{n}_1 , \vec{n}_2$

$\pi_\lambda , \vec{n}_\lambda$

$\vec{n}_1 , \vec{n}_2 , \vec{n}_\lambda \perp l$

$\vec{n}_1 , \vec{n}_2 , \vec{n}_\lambda \subset \pi$

$\vec{n}_\lambda = \lambda_1 \vec{n}_1 + \lambda_2 \vec{n}_2$

$p_\lambda = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 , \; q_\lambda = q_1 \lambda_1 + q_2 \lambda_2$

$r_\lambda = r_1 \lambda_1 + r_2 \lambda_2$

$\pi_\lambda : (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2) x + (q_1 \lambda_1 + q_2 \lambda_2) y + (r_1 \lambda_1 + r_2 \lambda_2) z + h_\lambda = 0$ — (1)

$\exists M(x, y, z) \in \pi_1 , \pi_2 , \pi_\lambda$

$(p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2) x + (q_1 \lambda_1 + q_2 \lambda_2) y + (r_1 \lambda_1 + r_2 \lambda_2) z + \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 = 0$ — (2)

$h_\lambda = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2$

$\pi_\lambda : P(\lambda_1 , \lambda_2) : (p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2) x + (q_1 \lambda_1 + q_2 \lambda_2) y + (r_1 \lambda_1 + r_2 \lambda_2) z + h_1 \lambda_1 + h_2 \lambda_2 = 0 , \; \lambda_1 , \lambda_2 \in R$

نفرض $\lambda \neq 0 , \; \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \lambda$

$$P(\lambda) : (p_1 + \lambda p_2) x + (q_1 + \lambda q_2) y + (r_1 + \lambda r_2) z + h_1 + \lambda h_2 = 0$$ — (3)

تمرين:

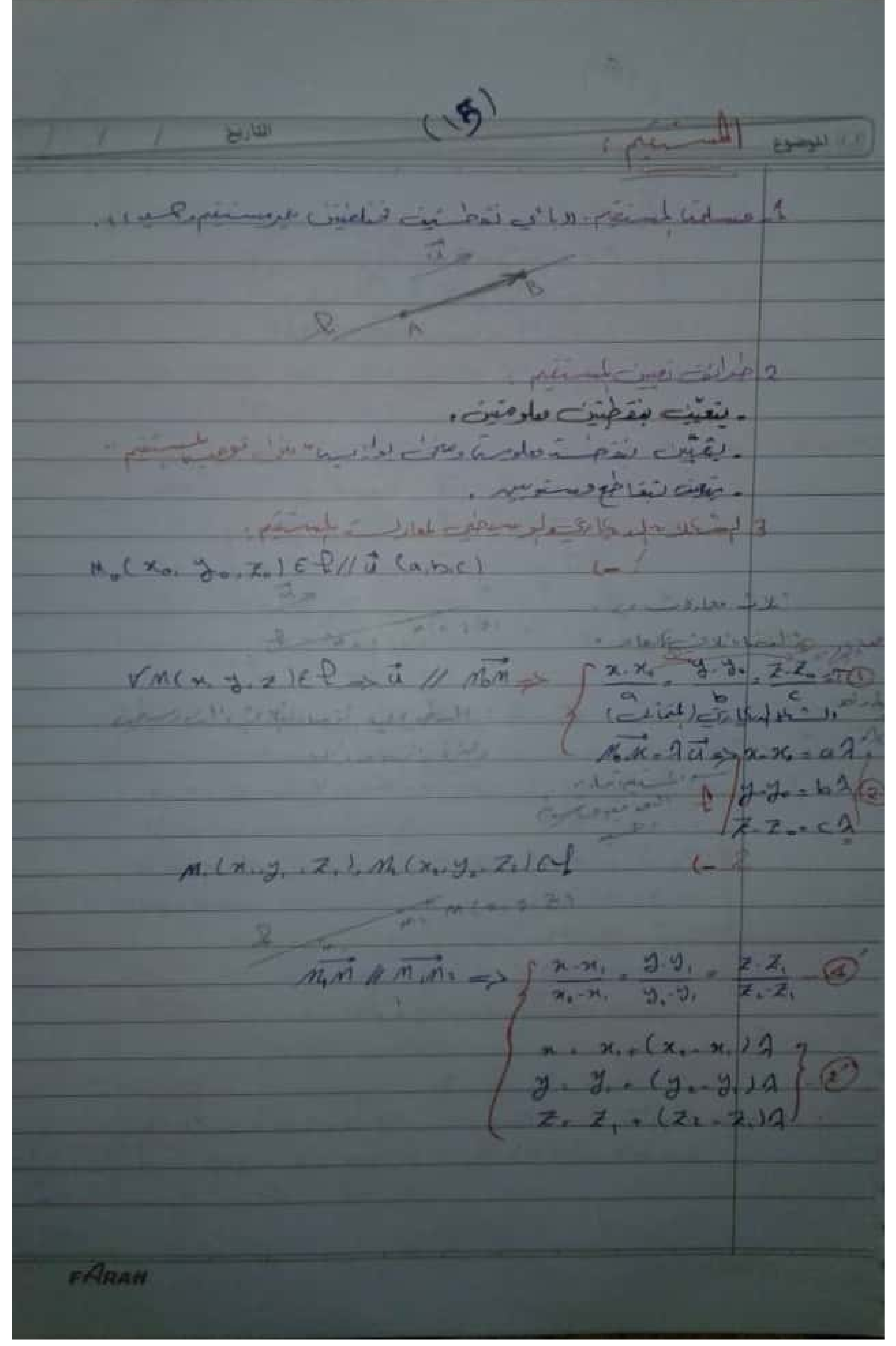
أوجد معادلة المستوي من الحزمة المشتركة للمستويين المعلومين

$\pi_1 :$

$\pi_2 :$

المعطى ... ويمر بالنقطة المعلومة $M_0(\; , \; , \;)$

FARAH



المستقيم:

1. تعريف المستقيم: هو الذي تحتويه نقطتين من مستقيم وحيد.

2. طرائق تعيين المستقيم:
- يتعين بنقطتين معلومتين.
- يتعين بنقطة معلومة وشعاع توجيه للمستقيم.
- يتعين بتقاطع مستويين.

3. أشكال المعادلات الديكارتية والوسيطية للمستقيم:

أ) $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D \,//\, \vec{u}(a, b, c)$

$\forall M(x, y, z) \in D \Rightarrow \vec{u} \,//\, \vec{M_0M} \Rightarrow \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ (1) الشكل الديكارتي (المعادلات)

$\vec{M_0M} = \lambda \vec{u} \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = a\lambda \\ y - y_0 = b\lambda \\ z - z_0 = c\lambda \end{cases}$ (2)

ب) $M_1(x_1, y_1, z_1),\ M_2(x_2, y_2, z_2) \in D$

$\vec{M_1M} \,//\, \vec{M_1M_2} \Rightarrow \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ (1')

$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)\lambda \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)\lambda \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)\lambda \end{cases}$ (2')

FARAH

(15)

التاريخ / / الموضوع

3 - ب)

$\vec{u} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$

$$(d) \begin{cases} p_1x + q_1y + r_1z + h_1 = 0 \\ p_2x + q_2y + r_2z + h_2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

المعادلات الأساسيات (الشكل الأساسي)

كل مستقيم (d) يعرف بتقاطع مستويين (1) و (2) ، (3).

الانتقال من (2) ← (1)

لدينا نقطة معلومة في (1) و (2) نسميها $M_0(x_0, y_0, z_0)$ [illegible]

لا يوجد في (3) ولا يعطينا في (2)

$\vec{u} \perp \vec{n}_1, \vec{n}_2$

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}$$

$z = z_0$; نفرض $\frac{p_1}{p_2} \neq \frac{q_1}{q_2}$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$x_0 = x(z_0)$ و $y_0 = y(z_0)$ احداثيات نقطة معلومة ومنه نحصل على مستقيم

ملاحظة: يمكن الانتقال من (2) إلى (3) [illegible] الى الشكل الوسيطي مباشرة (1).

نفرض أحد المتغيرات هو الوسيط [illegible]

$$\begin{cases} z = \lambda \; ; \; p_1/p_2 \neq q_1/q_2 \\ \Rightarrow x = x(\lambda) \\ y = y(\lambda) \end{cases}$$

تطبيق:

$$(d) \begin{cases} x + 2y - 3z + 1 = 0 \\ 2x - 4y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

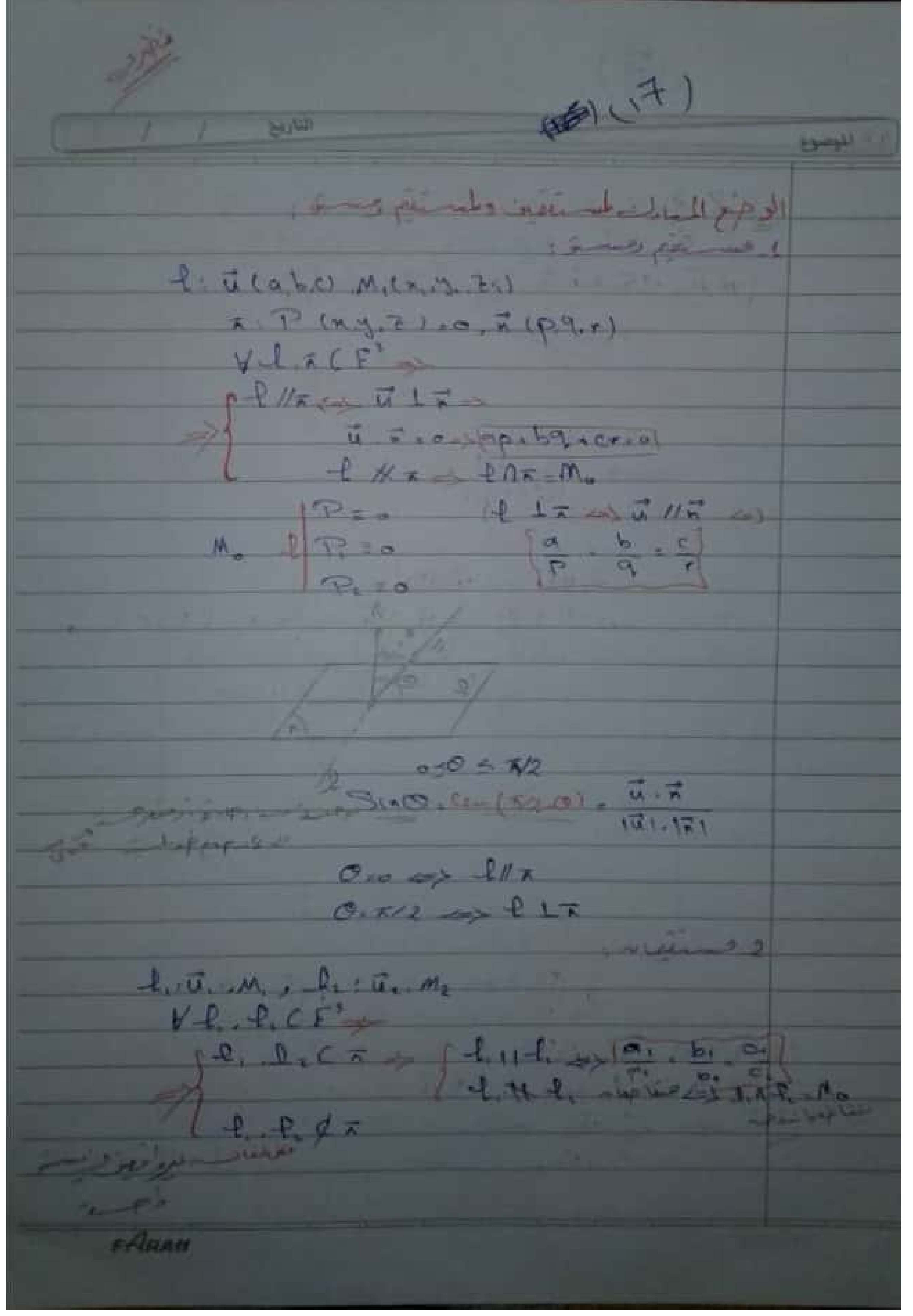
$\frac{1}{2} \neq -\frac{4}{2}$

(1) $y = \lambda$; $\frac{1}{2} \neq -\frac{3}{1}$

$x - 3z + 1 + 2\lambda = 0$ $\quad$ $7z - 3 = 0 \Rightarrow z = \frac{3}{7}$

$2x + z - 1 + 4\lambda = 0$ $\quad$ $7x - 6 + 30\lambda = 0 \Rightarrow x = \frac{-30\lambda}{7} + \frac{6}{7}$

FARAH



(17)

الموضوع التاريخ / /

الوضع النسبي لمستقيم ومستوي ومستقيمين

1. مستقيم ومستوي:

$l: \vec{u}(a,b,c),\ M_1(x_1,y_1,z_1)$

$\pi: P(x,y,z)=0,\ \vec{n}(p,q,r)$

$\forall\, l,\pi \subset E^3 \Rightarrow$

$l \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow ap+bq+cr=0$

$l \nparallel \pi \Rightarrow l \cap \pi = M_0$

$M_0 \quad l \begin{cases} P=0 \\ P_1=0 \\ P_2=0 \end{cases}$

$l \perp \pi \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{n}$

$\frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\frac{c}{r}$

$0 \le \theta \le \pi/2$

$\sin\theta = \cos(\pi/2-\theta) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}$

$\theta=0 \Rightarrow l \parallel \pi$

$\theta=\pi/2 \Rightarrow l \perp \pi$

2. مستقيمان:

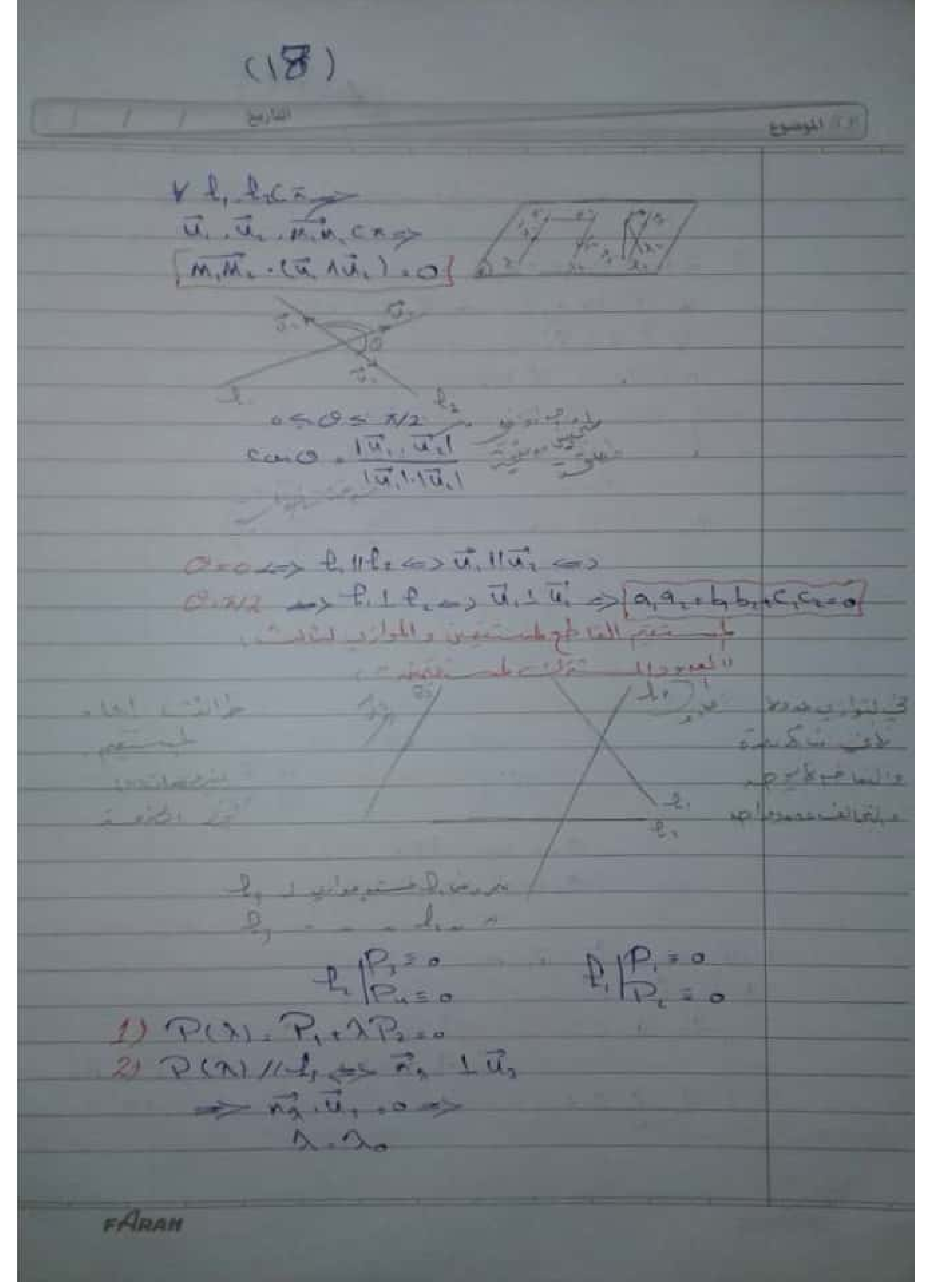
$l_1: \vec{u}_1, M_1\ ;\ l_2: \vec{u}_2, M_2$

$\forall\, l_1,l_2 \subset E^3 \Rightarrow$

$l_1, l_2 \subset \pi \Rightarrow \begin{cases} l_1 \parallel l_2 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2} \\ l_1 \nparallel l_2 \text{ متقاطعان } l_1 \cap l_2 = M_0 \end{cases}$

$l_1, l_2 \not\subset \pi$ متخالفان

FARAH



التاريخ / / الموضوع

$\forall\, l_1, l_2 \subset \pi$

$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{M_1M_2} \subset \pi$

$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) = 0$

$0 \le \theta \le \pi/2$

$\cos\theta = \dfrac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|}$

$\theta = 0 \Leftrightarrow l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2 \Leftrightarrow$

$\theta = \pi/2 \Rightarrow l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \Rightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

$l_2 \begin{cases} P_3 = 0 \\ P_4 = 0 \end{cases}$ $\quad l_1 \begin{cases} P_1 = 0 \\ P_2 = 0 \end{cases}$

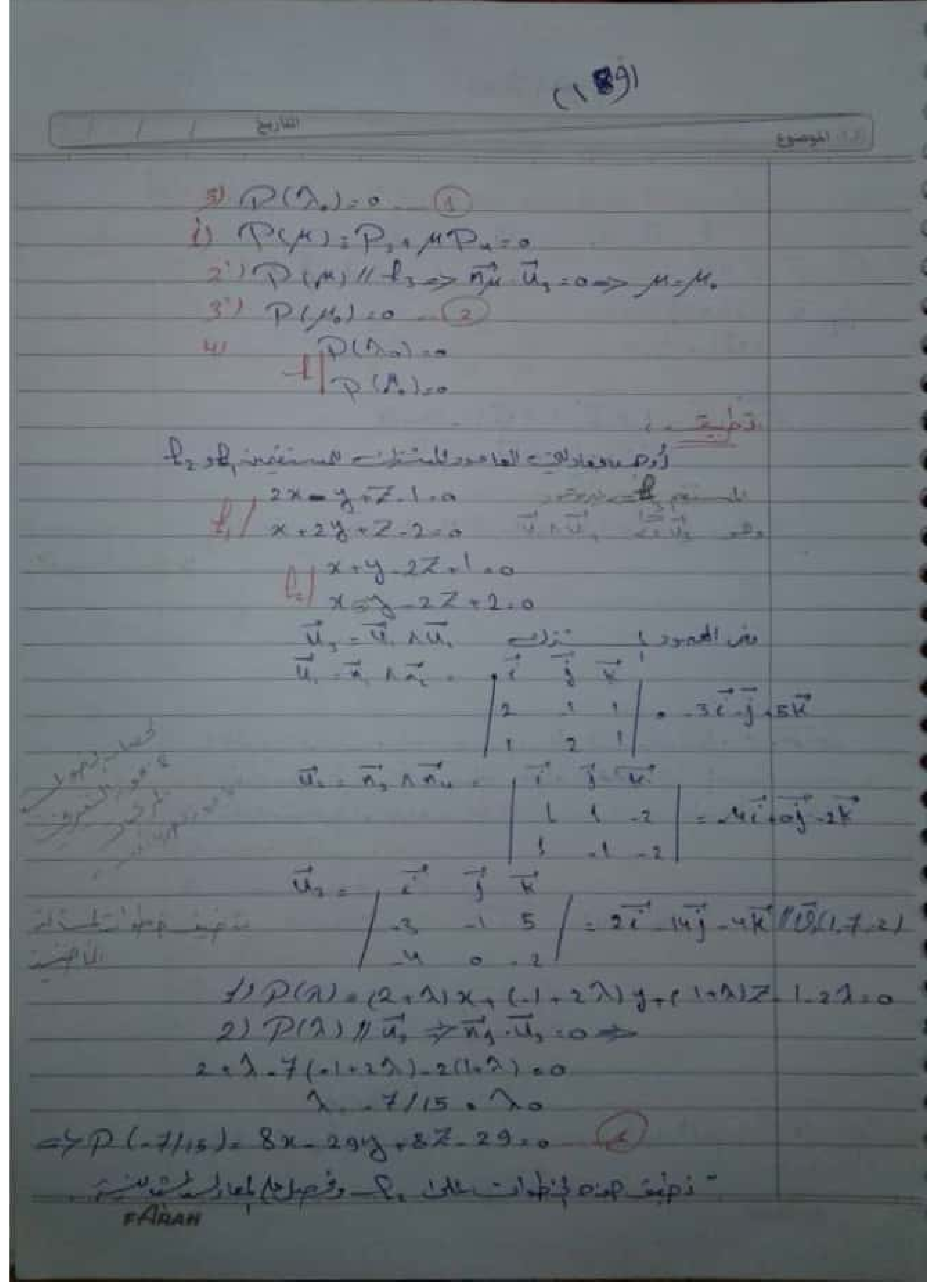
1) $P(\lambda) = P_1 + \lambda P_2 = 0$

2) $P(\lambda) \parallel l_2 \Leftrightarrow \vec{n}_\lambda \perp \vec{u}_2$

$\Rightarrow \vec{n}_\lambda \cdot \vec{u}_2 = 0 \Rightarrow$

$\lambda = \lambda_0$

FARAH



(189)

التاريخ / / الموضوع

3) $P(\lambda_0) = 0$ ... (1)

1') $P(\mu) = P_3 + \mu P_4 = 0$

2') $P(\mu) \parallel d_3 \Rightarrow \vec{n}_\mu \cdot \vec{u}_3 = 0 \Rightarrow \mu = \mu_0$

3') $P(\mu_0) = 0$ ... (2)

4') $d \begin{cases} P(\lambda_0) = 0 \\ P(\mu_0) = 0 \end{cases}$

تطبيق :

أوجد معادلة العامود المشترك للمستقيمين d_1 و d_2

$d_1 \begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ x + 2y + z - 2 = 0 \end{cases}$

$d_2 \begin{cases} x + y - 2z + 1 = 0 \\ x - y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$

شعاع العمود المشترك: $\vec{u}_3 = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$

$\vec{u}_1 = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$

$\vec{u}_2 = \vec{n}_3 \wedge \vec{n}_4 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 0\vec{j} - 2\vec{k}$

$\vec{u}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -1 & 5 \\ -4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 14\vec{j} - 4\vec{k} \parallel \vec{u}_3(1, -7, -2)$

1) $P(\lambda) = (2+\lambda)x + (-1+2\lambda)y + (1+\lambda)z - 1 - 2\lambda = 0$

2) $P(\lambda) \parallel \vec{u}_3 \Rightarrow \vec{n}_\lambda \cdot \vec{u}_3 = 0 \Rightarrow$

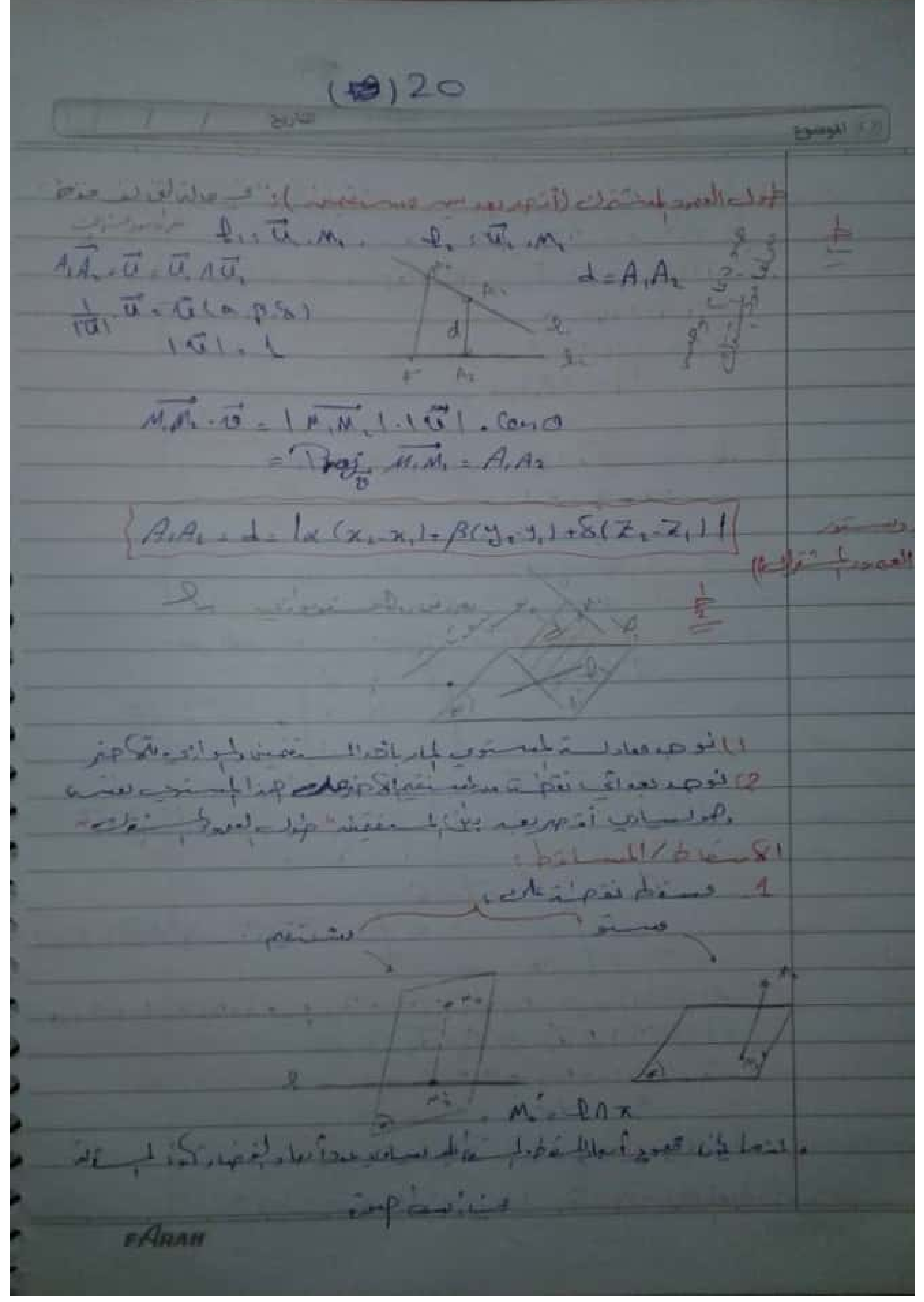
$2 + \lambda - 7(-1+2\lambda) - 2(1+\lambda) = 0$

$\lambda = -7/15 = \lambda_0$

$\Rightarrow P(-7/15) = 8x - 29y + 8z - 29 = 0$ ... (3)

" نوجد معادلة [illegible] d_2 ونحصل على [illegible] "

FARAH



طول العمود المشترك (أقرب بعد بين مستقيمين):

$\ell_1 : \vec{u}_1 , M_1 \qquad \ell_2 : \vec{u}_2 , M_2$

$\overrightarrow{A_1A_2} \parallel \vec{u} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$

$\frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u} = \vec{v}(\alpha , \beta , \delta)$

$|\vec{v}| = 1$

$d = A_1A_2$

$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{v} = |\overrightarrow{M_1M_2}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\theta$

$= \text{Proj}_{\vec{v}} \overrightarrow{M_1M_2} = A_1A_2$

$$A_1A_2 = d = |\alpha(x_2 - x_1) + \beta(y_2 - y_1) + \delta(z_2 - z_1)|$$

1) نوجد معادلة المستوي المار بأحد المستقيمين والموازي للآخر

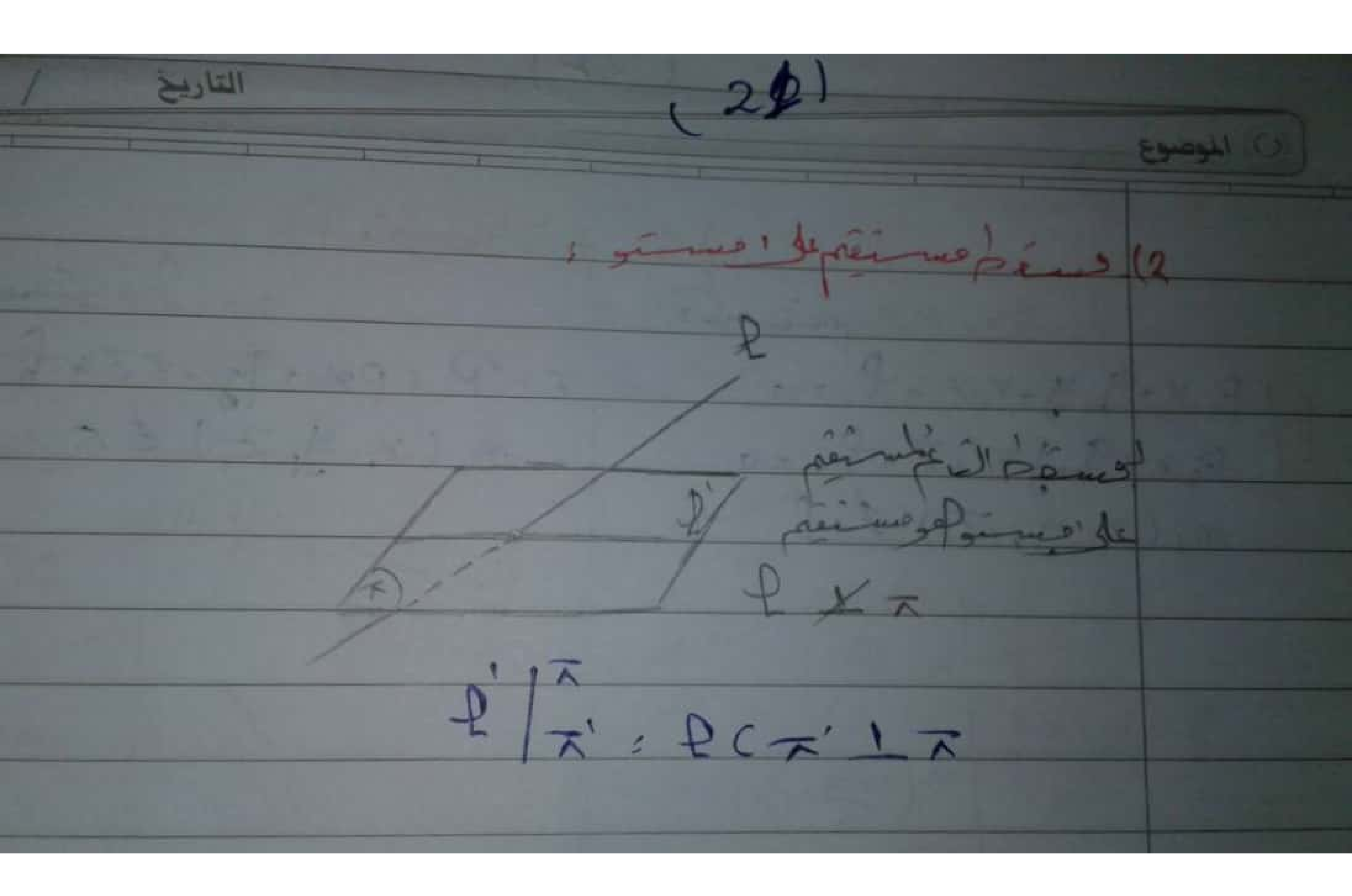
2) نوجد بعد أي نقطة من المستقيم الآخر عن هذا المستوي فنحصل على البعد المساوي أقصر بعد بين المستقيمين = طول العمود المشترك

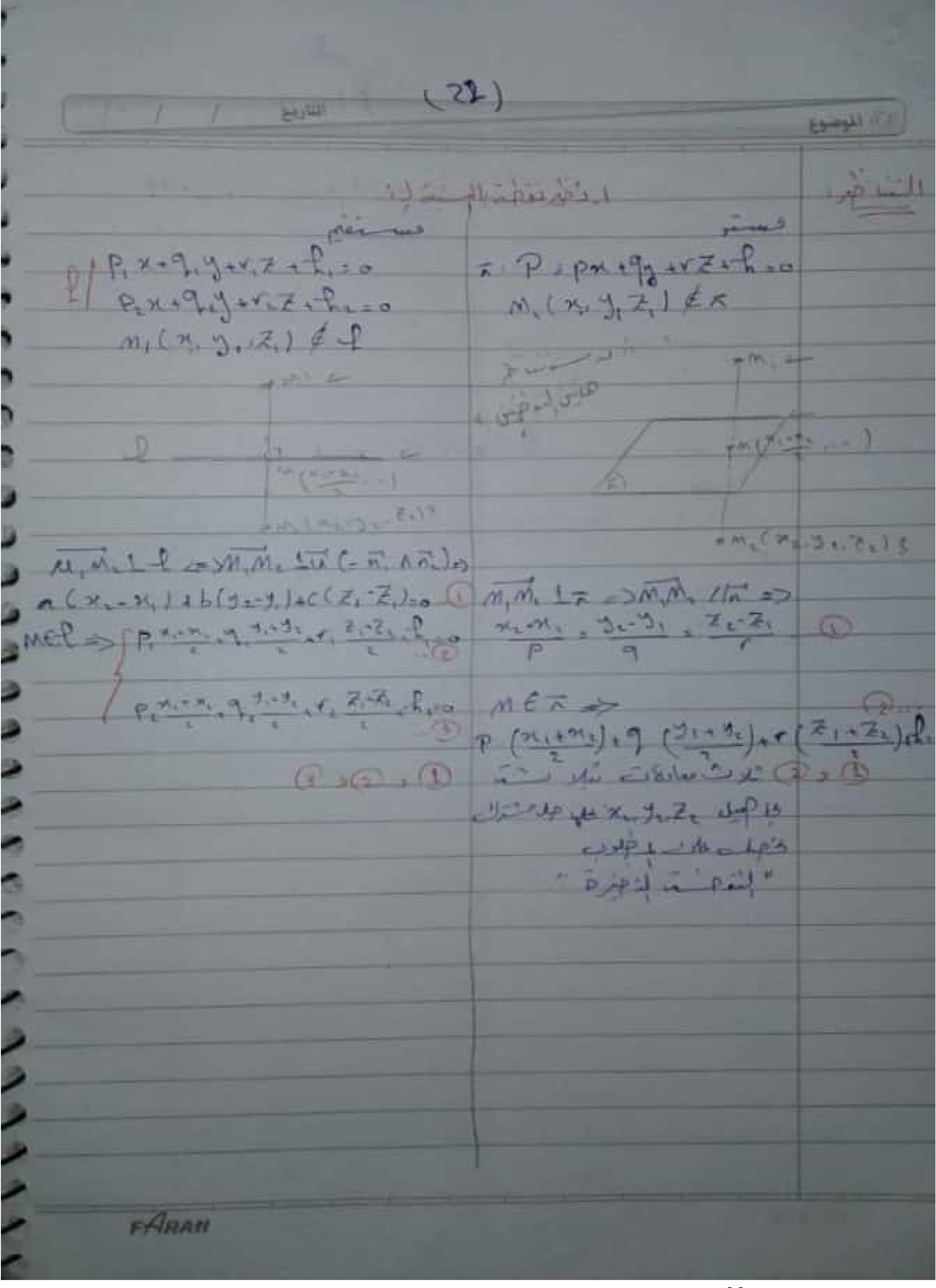
الإسقاط / المساقط:

1. مسقط نقطة على:

مستقيم — مستوي

$M' = \ell \cap \pi$


التاريخ
الموضوع
2) مسقط مستقيم على مستوى :
المسقط العمودي لمستقيم على مستوى هو مستقيم
L
L'



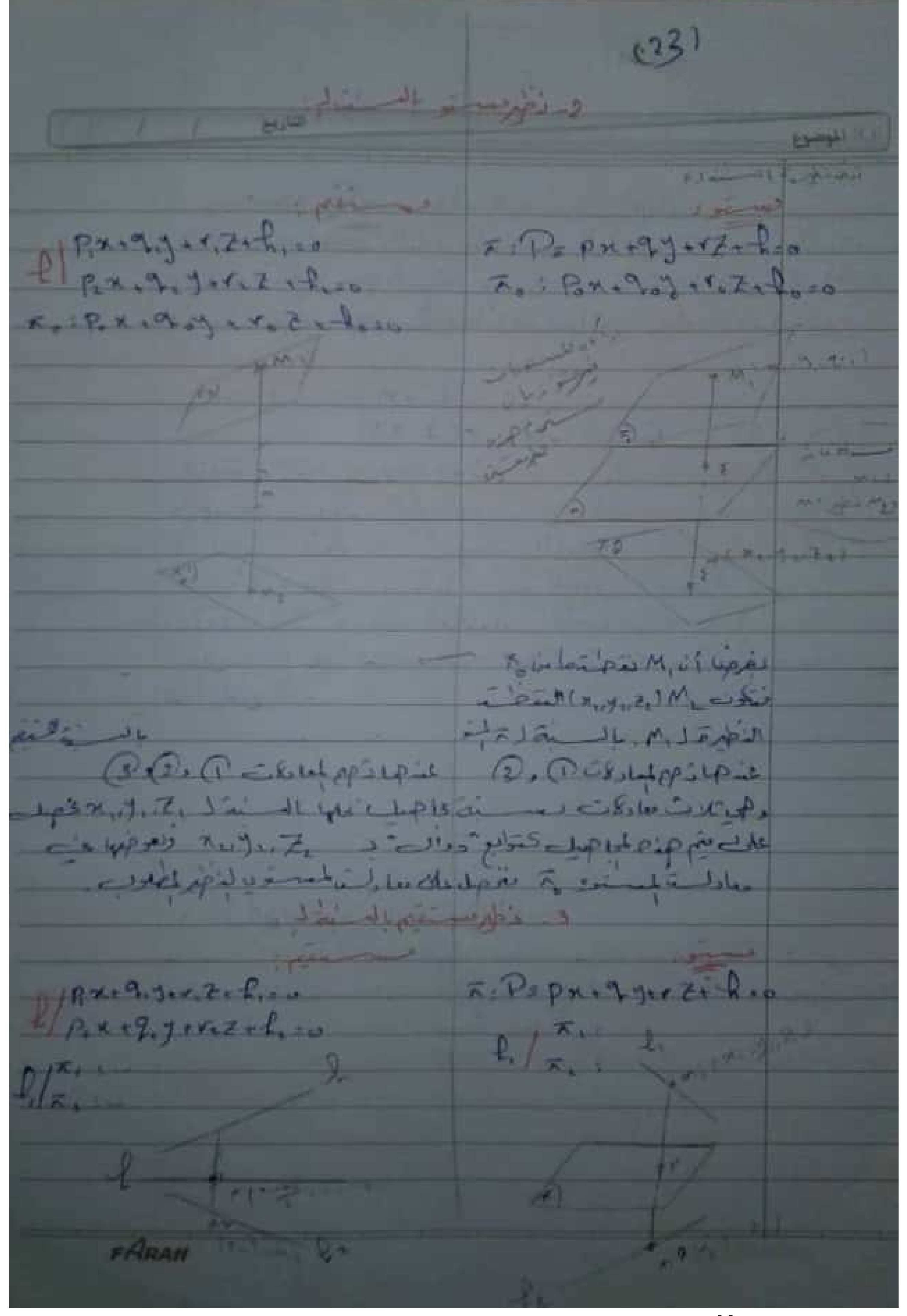
التاريخ / /

الموضوع

التناظر

التناظر بالنسبة لـ

مستقيم	مستوي
$l: \begin{cases} p_1x+q_1y+r_1z+h_1=0 \\ p_2x+q_2y+r_2z+h_2=0 \end{cases}$	$\pi: P: px+qy+rz+h=0$
$M_1(x_1,y_1,z_1) \notin l$	$M_1(x_1,y_1,z_1) \notin \pi$
$\overrightarrow{M_1M_2} \perp l \Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2} \perp \vec{u}\ (=\vec{n_1}\wedge\vec{n_2}) \Rightarrow$	$\overrightarrow{M_1M_2} \perp \pi \Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2} \parallel \vec{n} \Rightarrow$
$a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)+c(z_2-z_1)=0$ ①	$\frac{x_2-x_1}{p}=\frac{y_2-y_1}{q}=\frac{z_2-z_1}{r}$ ①
$M\in l \Rightarrow \begin{cases} p_1\frac{x_1+x_2}{2}+q_1\frac{y_1+y_2}{2}+r_1\frac{z_1+z_2}{2}+h_1=0 & ② \\ p_2\frac{x_1+x_2}{2}+q_2\frac{y_1+y_2}{2}+r_2\frac{z_1+z_2}{2}+h_2=0 & ③ \end{cases}$	$M\in\pi \Rightarrow p\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+q\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)+r\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)+h=0$ ②
①، ②، ③	① و ② ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل x_2, y_2, z_2


(23)
$\pi : P \equiv px + qy + rz + h = 0$
$\pi_0 : P_0 x + q_0 y + r_0 z + h_0 = 0$
$P_1 x + q_1 y + r_1 z + h_1 = 0$
$P_2 x + q_2 y + r_2 z + h_2 = 0$
$\pi_0 : P_0 x + q_0 y + r_0 z + h_0 = 0$
$M_2(x_2, y_2, z_2)$
x_2, y_2, z_2
$\pi : P \equiv px + qy + rz + h = 0$
FARAN

(24)

التاريخ / /   الموضوع

تمرين الأسئلة [illegible] ذاتها

[illegible] المعادلات الثلاث [illegible] ثلاث معادلات [illegible] و [illegible] x, y, z [illegible] المستقيم [illegible] المستقيم [illegible]

تمرين [illegible]

لتكن لدينا النقاط الآتية :

$A(2, 1, 2)$ $B(2, 2, -1)$ $C(2, 1, 1)$

1) أثبت أن [illegible] $\vec{AB} \times \vec{AC}$ [illegible] Δ

[illegible] $\neq (0, 0, -1)$

2) احسب طول الارتفاع [illegible] الرأس A

3) [illegible] معادلة [illegible] الرأس A

4) [illegible] معادلة [illegible] الرأس [illegible]

[illegible] هذا المثلث قاعدة [illegible] رأسه O [illegible] معادلة [illegible] القاعدة

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$\pi(ABC) \equiv x-2=0$

$O(0,0,0) \notin \pi$

في هذا [illegible] :

[illegible] طول الارتفاع [illegible] معادلة [illegible] الارتفاع [illegible] مستقيم [illegible] الرأس [illegible] القاعدة

① [illegible]

A [illegible] A [illegible] BC

[illegible] A [illegible] BC

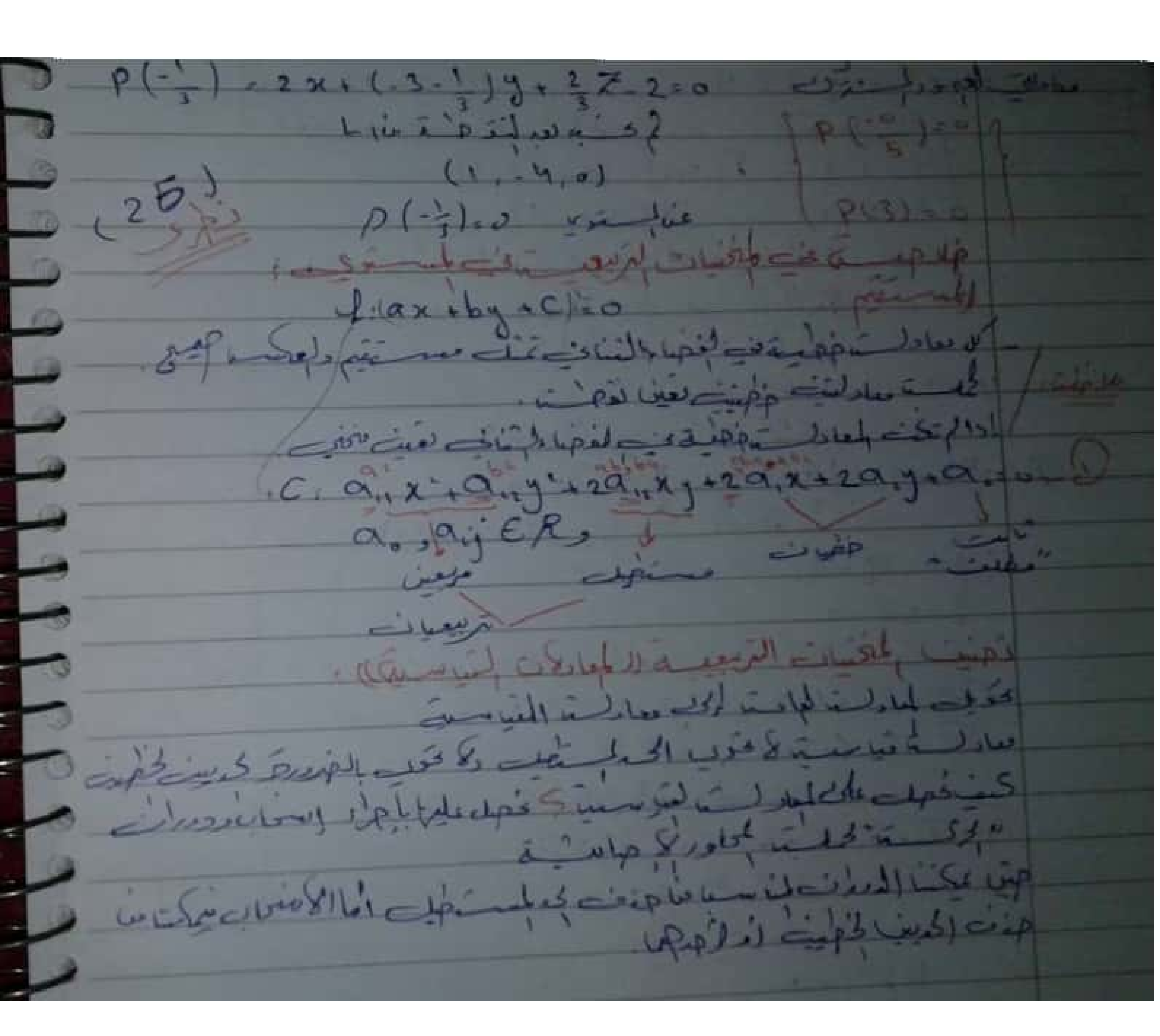
[illegible] BC [illegible]

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

FARAH

[illegible] $= 0$

[illegible] $\notin \pi$



معادلتي الجذور المشتركة

$P(-\frac{1}{3}) = 2x + (-3 - \frac{1}{3})y + \frac{2}{3}z - 2 = 0$

أي تمر بالنقطة

$(1, -4, 0)$

$P(\frac{-0}{5}) = 0$

$P(3) = 0$

(25) (تمرين)

$P(-\frac{1}{3}) = 0$ عن المستوي

ملاحظة في المنحنيات التربيعية في المستوي :

المستقيم

$f: (ax + by + c) = 0$

ملاحظة: كل معادلة خطية في الفضاء الثنائي تمثل مستقيم والعكس صحيح كل مستقيم معادلته خطية تعين لنا خطاً.

ماذا تمثل المعادلات الخطية في الفضاء الثنائي تعين منحني

$C: a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$

$a_0, a_{ij} \in R$

مربعين — مستطيل — خطيات — ثابت "مطلق"

تربيعيات

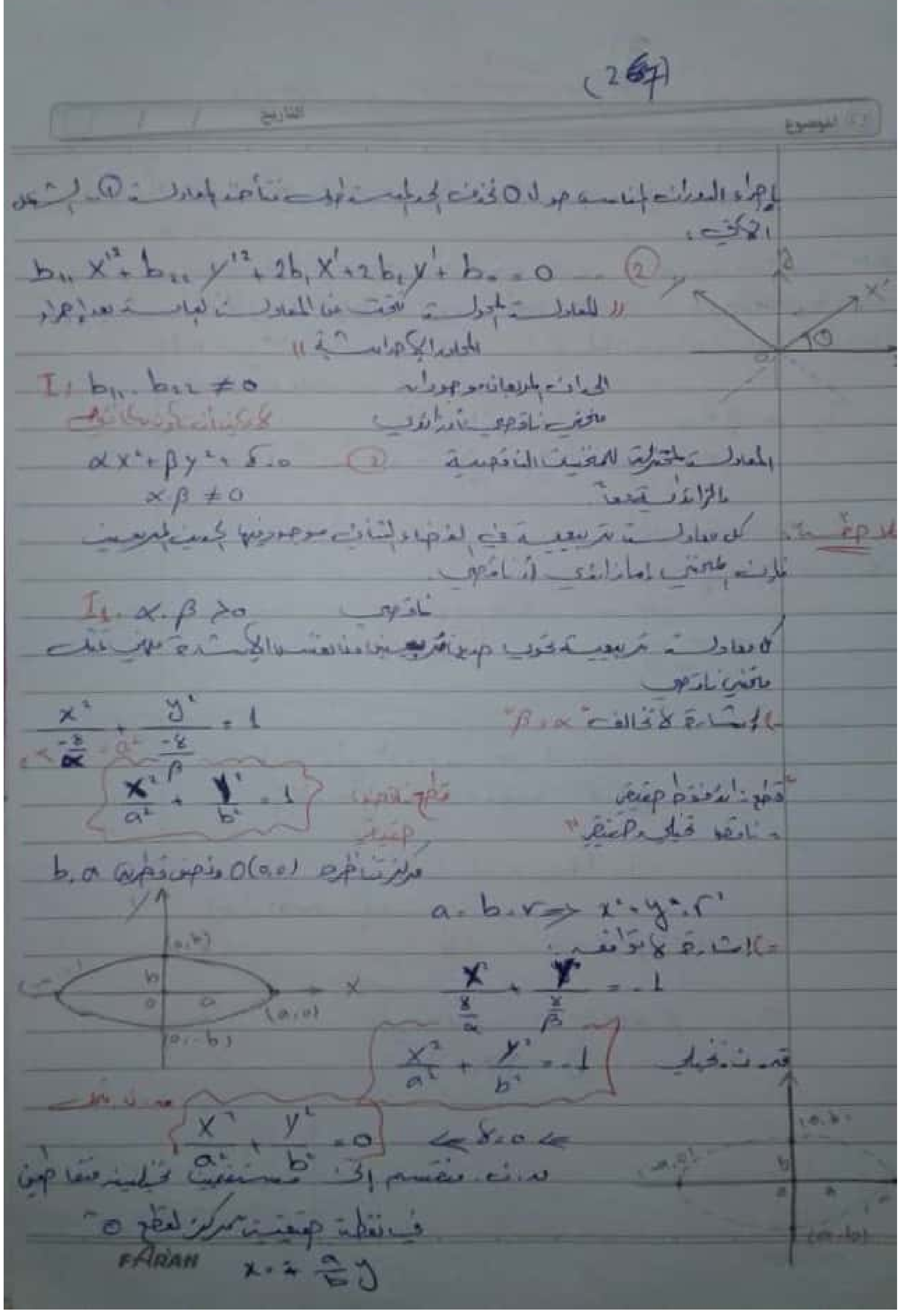
تصنيف المنحنيات التربيعية (المعادلات القياسية) :

تحويل المعادلة العامة إلى معادلة القياسية

معادلة قياسية لا تحوي الحد المختلط ولا تحوي بالضرورة كل من الحدود

كيف نحصل على المعادلات القياسية؟ نحصل عليها بإجراء إنسحاب ودوران للمحاور الإحداثية المحاور الأساسية

حيث يمكننا الدوران من حذف الحد المختلط أما الانسحاب فيمكننا من حذف الحدود الخطية أو أحدهما.



الموضوع — التاريخ / /

بإجراء التحويلات المناسبة حول O نحذف الحدود الخطية من المعادلة ① لنحصل على الشكل:

$$b_{11}x'^2 + b_{22}y'^2 + 2b_1x' + 2b_2y' + b_0 = 0 \quad ②$$

" المعادلة الجديدة تختلف عن المعادلة السابقة بعد إجراء التحويلات الإحداثية "

I: $b_{11} \cdot b_{22} \neq 0$ — المعادلة بالمربعات هو جوهرية — منحني ناقصي أو زائدي

المعادلة الجبرية للمنحنيات الناقصية والزائدية تعطى:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \delta = 0 \quad ③$$

$$\alpha\beta \neq 0$$

كل معادلة تربيعية في الفضاء الثنائي من حدودها الحد المربع تمثل منحنى إما زائدي أو ناقصي

I_1: $\alpha \cdot \beta > 0$ — ناقصي

كل معادلة تربيعية تحوي حدين مربعين لهما نفس الإشارة تمثل منحنى ناقصي

- إشارة δ لا تخالف α, β:

$$\frac{x^2}{-\frac{\delta}{\alpha}} + \frac{y^2}{-\frac{\delta}{\beta}} = 1 \qquad a^2 = -\frac{\delta}{\alpha},\; b^2 = -\frac{\delta}{\beta}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$ قطع ناقص حقيقي

قطع ناقص حقيقي

مركزه $O(0,0)$ ونصف قطريه a, b

$$a = b = r \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

- إشارة δ لا توافق:

$$\frac{x^2}{\frac{\delta}{\alpha}} + \frac{y^2}{\frac{\delta}{\beta}} = -1$$

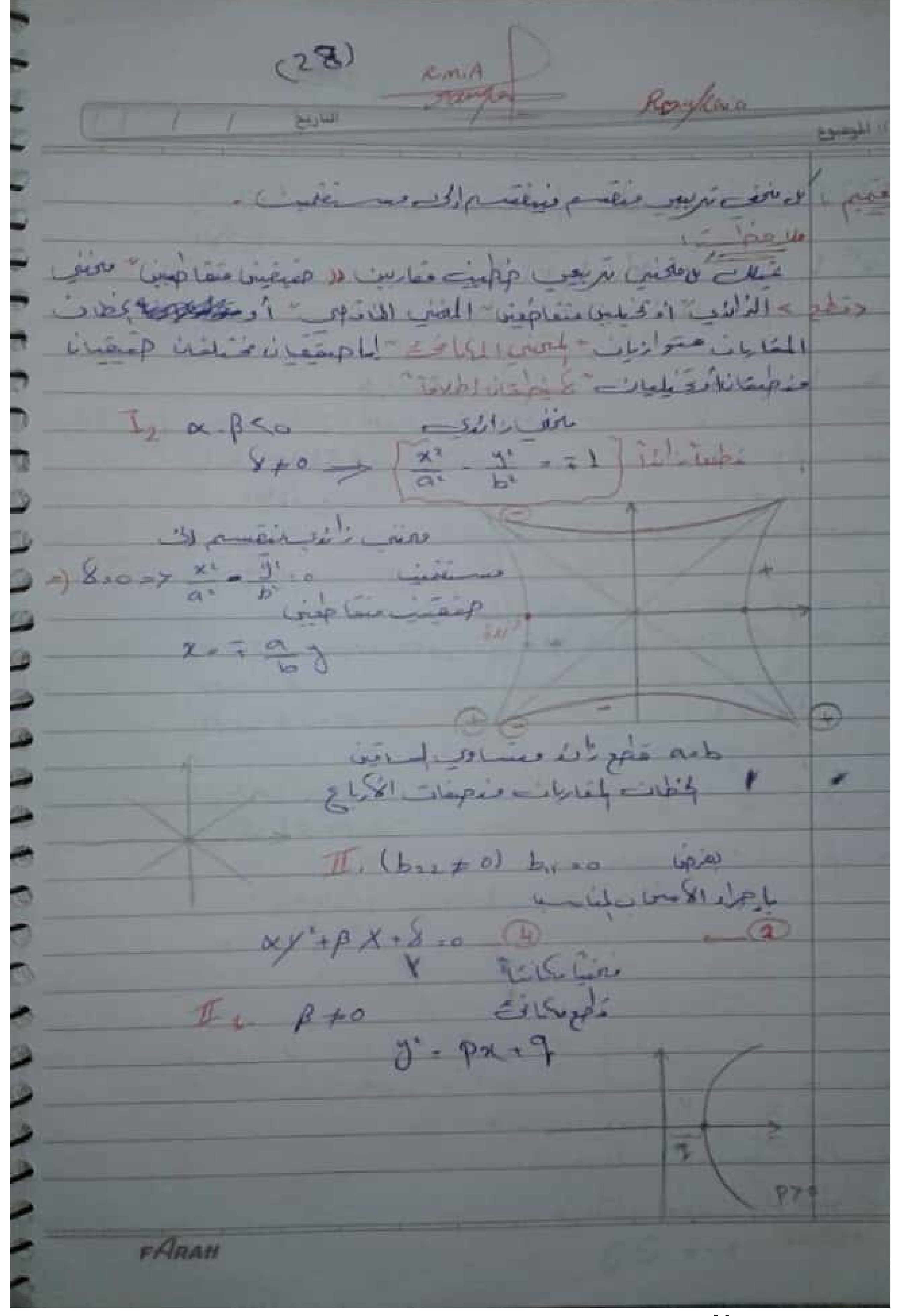
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1}$$ قطع ناقص خيالي

$$\delta = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0}$$

تمثل مستقيمين تخيليين متقاطعين في نقطة حقيقية مركز القطع O

$$x = \pm \frac{a}{b} y$$

FARAH



تعميم : كل منحنٍ تربيعي منقسم فينقسم إلى مستقيمين .

ملاحظات :

هناك ٦ منحنيات تربيعية خاصة تقاربية « مستقيمان متقاطعان » منحني القطع الزائد أو تخيليين متقاطعين " المنحني الناقص " أو ... المقاربات متوازيات " المنحني المكافئ " إما مستقيمان متوازيان مستقيمان منطبقان أو تخيليان " مستقيمان متوازيان "

I_2 $\alpha\beta<0$ منحني زائدي

$\gamma\neq 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\mp 1$ قطعان زائدان

منحني زائدي منقسم إلى

$\gamma=0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ مستقيمين متقاطعين

$x=\mp\frac{a}{b}y$

إذا $a=b$ قطع زائد متساوي الساقين

الخطان المقاربان منصفات الأرباع

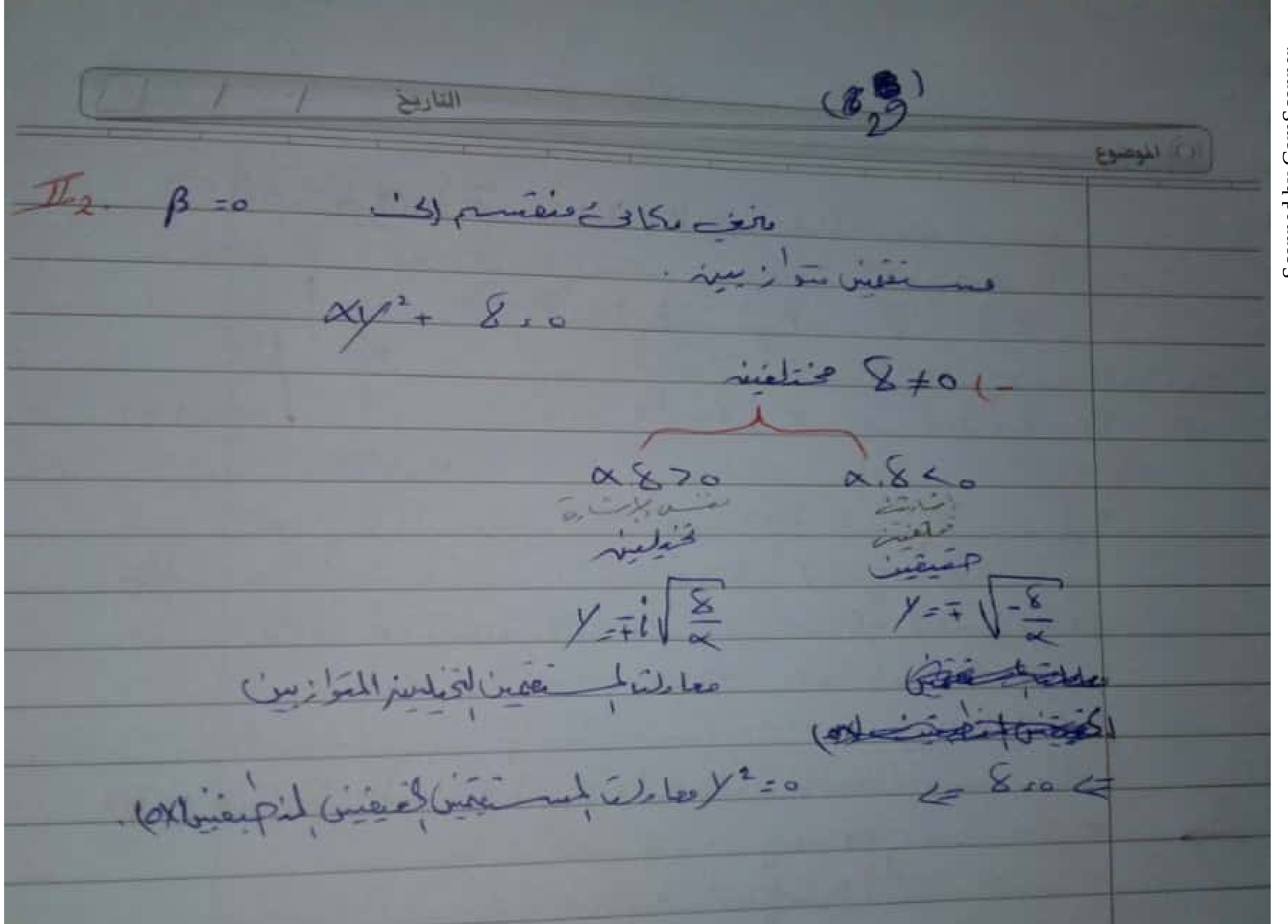
$II.$ $(b_{22}\neq 0)$ $b_{11}=0$ نفرضها بإجراء الإصلاح المناسب

$\alpha y^2+\beta X+\gamma=0$ (4) ← (2)

منحنيات مكافئة

II_1 $\beta\neq 0$ قطع مكافئ

$y^2=px+q$



التاريخ / /

(B 29)

الموضوع

II_2. $\beta = 0$ منحنى مكافئ منقسم إلى

مستقيمين متوازيين.

$\alpha y^2 + \delta = 0$

1) $\delta \neq 0$ مختلفين

$\alpha . \delta < 0$	$\alpha \delta > 0$
إشارات مختلفة	نفس الإشارة
حقيقيين	تخيليين
$y = \mp \sqrt{-\frac{\delta}{\alpha}}$	$y = \mp i \sqrt{\frac{\delta}{\alpha}}$
~~معادلتا المستقيمين الحقيقيين المتوازيين~~	معادلتا المستقيمين التخيليين المتوازيين

$\Leftarrow \delta = 0 \Leftarrow y^2 = 0$ معادلة المستقيمين الحقيقيين المنطبقين (ox).